1

解答　$6\frac{220}{301}$

頑張って計算してください

2

解答 24

ACをa、DCをbとすると

△ABCと△DCEは相似なので

AB：a＝b：DE

18：a＝b：8

内項の積と外項の積は等しいので

ab＝18×8

　＝144

∠ACBは鈍角なので三角不等式より、aは18より小さく、bは8よりも大きい。

よってa＝16、b＝9

もしくはa＝12、b＝12のどちらかの組み合わせになる。

また、16＋9＝25

　　12＋12＝24

よって仮定よりa＝12、b＝12となる。

よってADは12＋12＝24

3

解答 問1左から13番目、上から9番目

　問2　255

問① 1 / 3,5,7 / 9,11,13,15,17/…という群数列を考える。第n群の最初の奇数は2n^2-4n+3と表せて、
f(n)=2n^2-4n+3とすると,f(13)=289 , f(14)=339より
321は第13群、また321＝2(n-1)+289より、321は第17項目
ここで、13が奇数だから左下から右上に数えていくことを考えて図を推測する。
問② f(12)=243だから第12群の初項243,項差2の等差数列の第7項を考える(12は偶数なので右上から左下に数えていくから）

よって2(7-1)＋243＝255
別解左上から対角線上に$2n^2$-2n+1という規則で奇数が並んでいることを利用する(1,5,13…のように)

4

解答 5425.92㎤

AE、CFを延長して正方形、ABCDを作る。
また、Fを通り、BCに平行な直線を引き、GEとの交点をIとおくと、四角形GCFIは正方形、四角形ABCDも正方形
三角形AEIの面積は18㎠
ACとGFの交点をHとおくと、三角形FIHは影のついた部分で、正方形GCFIの4分の1の面積である。
また、三角形FEIも影のついた部分で、正方形ABCDから正方形GCFIと6cm×6 cmの正方形を除いた面積の4分の1である。
よって正方形ABCDの面積は、18×2+(90-18)×4=324㎠
18×18=324なので正方形ABCDの1辺の長さは18㎝
影のついた部分をABを軸に回転させてできる立体は、2つの円錐台から円錐を除いたような立体になる。その体積を求めると、
$\frac{1}{3}$×18×18×3.14×27- $\frac{1}{3}$12×12×3.14×24- $\frac{1}{3}$×6×6×3.14×3=5425.92㎤

5

解答 1,14

点DからOCに垂線を下ろし、その垂線とOCの交点をHとする。
仮定より、△ODC=1なので、1=$\frac{1}{2}$×OC×HD
OC=2なので、1=$\frac{1}{2}$×2×HD
HD=1
△HDOで、∠OHD=90°、HD=1、OD=2より、特別な三角形の辺の比から、∠DOH=30°
よって、∠DOC=30°…①
仮定より、∠AOC=∠DOCだから、
∠AOC=30°…②
また、仮定より、∠AOC+∠DOC=∠BNE…③
①、②、③より、∠BNE=60°…④
ここで、線分OEを引くと、
△NOEは、仮定より二等辺三角形だから、∠NOE=∠NEO…⑤
また、三角形の内角と外角の性質から、∠NOE+∠NEO=∠BNE…⑥
④、⑤、⑥より、∠NOE=30°…⑦
∠DOE=180°−(∠AOC+∠DOC+∠NOE)…⑧
①、②、⑦、⑧より、∠DOE=90°
斜線部の面積=扇形ODE−△ODEで、
扇形ODE=2×2×3.14×$\frac{1}{4}$
=3.14
△ODE=2×2×$\frac{1}{2}$
=2
したがって、斜線部の面積は1.14となる。

6

解答121

A.個

解説

0~999

整数をabcと表す（a,b,cは整数）（0≦a,b,c≦9）

題意より　a+b+c=10

制限のないとき$_{12}C_2$=66　66通り

このとき一つの変数が10となるのは3通り

66-3=63通り

1000~1999

1+a+b+c=10　よって　a+b+c=9

同様に$_{11}C_2$=55　55通り

2000~2026

2+0+b+c=10　b+c=8　(0≦b≦2)

(b,c)=(0,8)/(1,7)/(2,6)　の3通り

よって

63+55+3=<u>121</u>

7

解答

(1)18,54,60

(2)16,32,64,70,88

解説

(1)しらべあげると、(2,3,6,9)、(2,3,4,5,6)の約数の場合が考えられる。

(2,3,6,9)の最小公約数は18であるが、一回ずつしか足し合わされないので、54も表示される数は20である。

(2,3,4,5,6)が約数の整数は60が挙げられる

(2)調べ上げると、(2,4,8)、(2,5,7)の約数の場合が考えられる。

(2,4,8)が約数の最小の整数は8だが、2桁ではない。

16,32,64は2の累乗だが、足し合わされる約数は9以下であるため、いずれも表示される数は14である。また、同様の理由で88も表示される数は14である。

(2,5,7)が約数の整数は70である。

8

解答　14回

例えば9個の中から1つ見つける場合3個ずつのせると、天秤が釣り合えば乗せた6個の中にはなく残りの3個の中にあることがわかり、釣り合わないと傾いた3個の中にあることが分かる、そして3個の中から1つずつ乗せると同様にして分かる。
以下右に乗せたものの重りの数、左に乗せたもの重りの数、乗せなかったもの重りの数＝（a,b,c）のように表すとする(a,bは対称性からa>bとする)
このことを利用して2026個から675、675ずつ乗せる。乗せないものは676
もし傾くと(1,0,1),(2,0,0)のいずれかで釣り合ったら(1,1,0),(0,0,2)のいずれかということが分かる。
傾いた時上に上がったものには何も重りがないことから一つ下がったところに乗せて676個として乗せなかったものと測る。釣り合うと(1,0,1)のパターン、釣り合わないと(2,0,0)のパターンと分かる。
同様にして釣り合った時同様に乗せて676個同士で測る。1番最初に乗せたものを左に乗せたとして左が下がれば(1,1,0)、右に下がれば(0,0,2)と分かる。
1,1,0の組の場合は675または676が一回乗せることにより3分の1ずつ減っていき1つにつき6回使い、2つあるため12回、最初の2回と足し合わせて14回
2,0,0の組の場合は同じ試行を繰り返すことによって2回ずつで3分の1個ずつ減らせていける。3個になるまで全て2個ずつだったときも13個で14回測れば行ける。

9

解答　2160個、1709

1行目の数を 10A+B
2行目の数を 10C+D
3行目の数を 100E+10+F
4行目の数を 1000G+100H+10I+J
とおく。
0～9までかぶりなく書くので
A+B+C+D+E+F+G+H+I+J=45
S_1=B+D+F+J
S_2=A+C+I
S_3=E+H
S_4=G
と定義する。
また、A,C,E,G≠0に注意する。
筆算の10^nの位での繰上りをk_n(≧0)とすると
S_1=6+10k_1
S_2+1+k_1=2+10k_2⇔S_2=1-k_1+10k_2
S_3+k_2=0+10k_3⇔S_3=10k_3-k_2
G+k_3=2
となる。G≠0であったので、G=1∨G=2
G=2だとするとk_3=0となり、S_3=-k_2≦0となりS_3=E+H≧1と矛盾。
ゆえにG=1,k_3=1が確定する。
このとき、S_3=10-k_2となる。S_1+S_2+S_3+S_4=45であるので、
(6+10k_1)+(1-k_1+10k_2)+(10-k_2)+1=45
18+9(k_1+k_2)=45
k_1+k_2=3
ここで,Max(S_1)=9+8+7+6=30であるため、S_1=6+10k_1≦30よりk_1≦2である。
ゆえに(k_1,k_2)=(1,2),(2,1)のパターンのみである。
(i)k_1=1,k_2=2のとき
S_1=16,S_2=20,S_3=8,G=1である。
S_3=E+H=8となるのは(E,H)=(8,0),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3)のみである。
(ア)(E,H)=(8,0)のとき

S_2=A+C+I=20である。残りの{2,3,4,5,6,7,9}から三つ選んで和が20になるパターンは{9,6,5},{9,7,4}のみ。
ゆえに(A,C,I)はこれらの順列なので2×3!=12通りある。
(B,D,F,J)は残り四つの順列で24通りある。
(ア)は288通り
(イ)(E,H)=(2,6),(6,2)のとき
(E,H)の選び方で2通りある。
S_2=A+C+I=20である。残りの{0,3,4,5,7,8,9}から三つ選んで和が20になるパターンは{9,8,3},{9,7,4},{8,7,5}のみ。
ゆえに(A,C,I)はこれらの順列なので3×3!=18通りある。
(B,D,F,J)は残り四つの順列で24通りある。
(イ)は864通り
(ウ)(3,5),(5,3)のとき
(E,H)の選び方で2通りある。
S_2=A+C+I=20である。残りの{0,3,4,5,7,8,9}から三つ選んで和が20になるパターンは{9,7,4}のみ。
ゆえに(A,C,I)はこれらの順列なので1×3!=6通りある。
(B,D,F,J)は残り四つの順列で24通りある。
(ウ)は288通り
(i)は1440通り
(ii)k_1=2,k_2=1のとき
S_1=26,S_2=9,S_3=9,G=1である。
S_3=E+H=9となるのは(E,H)=(9,0),(2,7),(7,2),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)のみである。
(エ)(E,H)=(9,0)のとき
S_2=A+C+I=9である。残りの{2,3,4,5,6,7,8}から三つ選んで和が9になるパターンは{4,3,2}のみ。
ゆえに(A,C,I)はこれらの順列なので1×3!=6通りある。
(B,D,F,J)は残り四つの順列で24通りある。
(エ)は144通り
(オ)(E,H)=(2,7),(7,2)のとき
S_2=A+C+I=9である。残りの{2,3,4,5,6,7,8}から三つ選んで和が9になるパターンは{6,3,0},{5,4,0}のみ。
A,C≠0であったのでI=0となるほかない。ゆえに(A,C,I)は2×2!=4通りある。
(B,D,F,J)は残り四つの順列で24通りある。
(オ)は192通り
同様にして(E,H)=(3,6),(6,3)のときも192通り、(E,H)=(4,5),(5,4)のときも192通りある。
(ii)は720通り
解答すべき値は1440+720=2160通り

(後半の解説）方針：「G▸H▸J▸I」の順序で数字を絞り込んで、当てはまる最大の数字を決定する
（以下文字を小文字で表記）
条件よりg≠0。g≧2と仮定すると百の位で矛盾が生じる。よってg=1（決定）
h≧8と仮定するとe=2と決定した後、十の位で矛盾が生じる。よってh=7としてみる（仮決定）そしてe=2とする（仮決定）※この仮定の後矛盾が生じたならばここに戻って議論を再開する
「b+d+f+j=Z」とするとZ=16、26のいずれかである。
①Z＝16のとき
(b,d,f,j)=(8,5,3,0)▸残りの数字は4,6,9
(9,4,3,0)▸残りの数字は5,6,8（ただし順序は問わない）
そうすると十の位に残りの数字を当てはめたときに矛盾が生じる
②Z=26のとき
(b,d,f,j)＝(3,6,8,9)▸残りの数字0,4,5
(4,5,8,9)▸残りの数字0,3,6(ただし順序は問わない)
そうすると十の位に残りの数字を当てはめたときに矛盾が生じず、総和が2026となる。
このときi,jがともに最大となるように数字を決定するとi=0(a≠0かつc≠0より),j=9
以上よりMax.1709

10

解答 $6\sqrt{3}$

BDの長さはDFの長さに等しい。
またCDとFEの交点をGとすると三角形DEGは正三角形である。
正六角形の一辺の長さを1とするとFG=2、DG=1
∠FDGは90度なので三平方の定理より、DF=√3
よってBDの長さは√3･･･①
また、DF＝√3、CD=1
∠FDCは90度なので三平方の定理よりCF=2･･･②
①、②よりBDを一辺とする正方形の面積とCFを一辺とする正方形の面積の比は3：4
面積の差は4なのでCFを一辺とする正方形の面積は16であり、CF=4よって正六角形の一辺の長さは2である。よってこの正六角形の面積は6√3である。
答え　6√3

11

解答 90°

三角形ABCの内心をIと置く。直線BJと直線KM、直線CJと直線LMの交点をそれぞれX、Yと置く。
仮定を整理すると∠JXM=90°、∠JBI=90°
よってBI//LG、CI//LF
内心と傍接円の関係より
点A、I、Jは一直線上にある、
このとき点AFJLは∠JFL=∠JALより同一円上にある。①
また、点AGJKも同様に同一円上にある。②
KB=MB、∠KBF=∠MBF、FB=FB
よって△KBF=△MBF　対応する角は等しいので∠KFB=∠MFB
同様に∠LGC=∠MGC
このとき点AJLGは∠JAL=∠JGLより同一円上にある。③
また、点AJKFも同様に同一円上にある。④
①～④より
　点A、F、K、J、L、Gは同一円上にある。
角AKJ=90°より、円周角の定理で角JFAも90°

12

解答 n=0,1

n=2k,n=2k-1の時を考える。(kは整数)
n=2kのとき、

f(n)=4k^2 -4k+3
n=2k-1のとき、

f(n)=4k^2 -8k+6

=2(2k^2 -4k+3)
ここで、偶数の素数は2しかないためf(n)、またはf(n+1)のどちらかは2である。

2k^2 -4k+3=1となるkを考える。

2k^2 -4k+3=1

2k^2 -4k+2=0
k2-2k+1=0
2$(k-1)^2$=0
k=1
よって、nかn+1のいずれかは1である。n=1と考えると、f(1)=2かつ、f(2)=3 よって条件を満たす
n=0と考えると、f(0)=3　f(1)=2 よって条件を満たす
よって、n=0,1

13

解答 20

辺ADと辺BEの交点をHとする
⊿BECをBCを軸として線対称に移動させると(Eが移る先をE’とする)
∠EDI=∠E'DI…①　FD+DE’=FD+DE…②　BE=BE’…③
B,F,E,Cは共円(直径はBC)であるから、E’はこの円上にあるとわかる　よって
EE’=2EI…④
B,F,E,CとB,F,H,DとC,E,H,Dの共円に着目し、円周角の定理から
∠FDH=∠EDH…⑤
また条件より
∠EDH+∠EDI=90°…⑥
①,⑤,⑥より、F,D,E’は一直線上にあるとわかる　よって②より
FD+DE=FE’…⑦
四角形FBEE’においてトレミーの定理より
FB×EE'+FE×BE’=FE’×BE　③,④,⑦より
FB×2EI+FE×BE=(FD+DE)×BE　これに与えられた長さを代入して
15×24+7×BE=25×BE
よってBE=20
(EIの長さが与えられていなくてもBEを求めることができるが、こっちの解法のほうが美しいと思ったためこっちを採用。Bが⊿DEFの傍心ということを利用するとEIを使わずに解ける)

14

解答:8

以下のようなものを考える。

?1?5??????...

?には上記の正しい数字の性質をみたす適当な数字が入る。最も左のダイアルの正しい数字が最左方の桁、左から二番目のダイアルの正しい数字がこれの左から二番目の桁...

と言う具合になっている。

さて、左から三番目の桁には、左隣の桁が1、右隣の桁が5だから、この桁に入る数字は上記の条件より3の倍数かつ6以上の数字が入らなければならない。よって、

この桁に入る数字は6か9である。

ここで、最左方に入る数字は8しかないことを証明する。

左から三番目の桁に入る数字が6と仮定すると、最左方に入る数字は上記の性質より8しかない。

また、9と仮定してみると、2か8が入る。

最左方には2が入ると仮定してみる。

条件より、自然数aを用いて左から9a+1,9a+2,9a+3,...9aと表せる桁数目に入る数字は左から1,2,3...9番目に入る数字と同じになる。

また、条件より左から3の倍数桁番目の正しい数字は3の倍数にしかならない。

これを証明する。

左から5番目の桁の正しい数に着目する。ここで、条件より左からそれぞれ3,4,5番目の桁の正しい数字の和は3の倍数である。ゆえに、整数bを用いて左から3,4番目の桁の正しい数字はそれぞれ3b,3b+2と表せる。したがって、この和が3の倍数になるためには3b+1と表せる整数でなければならない。同様に、左から6,7,8,9番目の桁の正しい数字もそれぞれ、3b,3b+2,3b+1,3bと表せる整数となる。また、先ほど示した正しい数字の性質より、10番目以降は循環するため3の倍数番目の桁の正しい数字は3の倍数となることが示された。

ゆえに、左から9桁目に入る数字は3か6と確定する。

しかし、いずれの数字も左から9桁目に入れたとき、9,10,11桁目の数の和が12以上にならないため仮定は矛盾。よって、最左方に入る数字は8のみである。

以上より、最左方に入る数字は8で、2026=9×225+1だから、最右方に入る数字は8となる。

なお、上記と条件を満たすものは存在する。(例;8165492738...)

よって、これは適し、最右方に入る数字は8である。

解答 AB×CD＝$\dfrac{275}{3}$

解説

四角形 $ABCD$ の外接円を Γ とする．直線 PQ と Γ の交点のうち弧 AB 上にあるものを点 X，弧 CD 上にあるものを点 Y とする．胡蝶定理の逆から，点 M は弦 XY の中点でもある．方べきの定理より $DM \times MB = 36 = XM \times MY$ であるので，$MX = MY = 6$ となる．つまり $PX = QY = 2$ である．方べきの定理より

$$DQ \times QC = YQ \times QX = 2 \times 10 = XP \times PY = AP \times PB$$

であるので，$DQ = 3x$ とおけば $QC = 8x$ であり，$24x^2 = 20$ より $x^2 = \dfrac{5}{6}$ を得る．
$AB = 10x$，$CD = 11x$ であるので解答すべき値は $10x \times 11x = 110x^2 = \mathbf{\dfrac{275}{3}}$ となる．

16

解答$\frac{1}{2}\{(\frac{3}{4})^{n-1}-(\frac{1}{2})^{n-1}\}$

n回目のゲームのとき今まで一度も勝敗がついていない、つまりあいこの確率をA_n,最後に勝ったのがAの確率をB_n,最後にBが勝ったのをC_nして終了する確率をP_nとして推移図は以下

$A_{n+1}=\frac{1}{2}A_n$

$B_{n+1}=\frac{1}{4}A_n+\frac{1}{2}B_n+\frac{1}{4}C_n$

$C_{n+1}=\frac{1}{4}A_n+\frac{1}{4}B_n+\frac{1}{2}C_n$

$P_{n+1}=\frac{1}{4}B_n+\frac{1}{4}C_n$

$A_0=1,B_0=C_0=0$である。

$A_n=(\frac{1}{2})^n$

$B_{n+1}-C_{n+1}=\frac{1}{4}(B_n-C_n)$

よって、$B_n=C_n$

$B_{n+1}=\frac{3}{4}B_n+\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^n$

$2^{n+1}B_{n+1}=\frac{3}{2}\cdot 2^nB_n+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2^{n+1}B_{n+1}+1=\frac{3}{2}(2^nB_n+1)$

よって

$2^nB_n+1=(\frac{3}{2})^n$

$\Leftrightarrow B_n=(\frac{3}{4})^n-(\frac{1}{2})^n$

よって

$P_n = \frac{1}{2} B_{n-1}$

$= \frac{1}{2}\{(\frac{3}{4})^{n-1} - (\frac{1}{2})^{n-1}\}$

17

解答(m,n)=<u>(2025,1)</u>

(右辺)≡2(mod3)

よってmは奇数。

両辺に2をかけると

$2^{m+1}=2^{2026}\cdot 2n^2-2$

左辺は平方数より右辺も平方数。

$(2^{1013}\cdot n^2)^2 \leqq 2^{2026}\cdot n^4+2n^2-2<(2^{1013}\cdot n^2+1)^2$

よって

$2^{2026}\cdot n^4=2^{2026}\cdot n^4+2n^2-2$

$2n^2=2$

$n^2=1$

$n=1(n>0)$

問題文にn=1を代入すると

$2^m=2^{2025}+1-1$

$=2^{2025}$

$m=2025$

(m,n)=<u>(2025,1)</u>

18

解答

解説

$b_n = a_n - 1$ とおく．漸化式に代入して整理すると

$$b_{n+1} = b_n + \lfloor \sqrt{b_n + 1} + \sqrt{b_n - 1} \rfloor + \lceil \sqrt{b_n + 1} + \sqrt{b_n - 1} \rceil + 5$$

を得る．$b_1 = 9 = 3^2$ である．さて，ある整数 k が存在して，整数 $m_{\geq 3}$ を用いて $b_k = m^2$ と表されるとすると，

$$\sqrt{b_k + 1} + \sqrt{b_k - 1} = \sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{m^2 - 1}$$

である．$m^2 - 1 > (m-1)^2$ であり，両辺正であるので平方根を取ることで $\sqrt{m^2 - 1} > m - 1$ が従う．また，$\sqrt{m^2 + 1} > m$ であるので，

$$2m - 1 < \sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{m^2 - 1}$$

を得る．さらに，

$$(\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{m^2 - 1})^2 = (m^2 + 1) + (m^2 - 1) + 2\sqrt{(m^2 + 1)(m^2 - 1)}$$

であり，相加相乗平均の大小関係から $(m^2 + 1) + (m^2 - 1) > 2\sqrt{(m^2 + 1)(m^2 - 1)}$ である（$m^2 + 1 \neq m^2 - 1$ であるので等号は成立することはない）ので，

$$(\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{m^2 - 1})^2 < 2\{(m^2 + 1) + (m^2 - 1)\} = 4m^2$$

であり，両辺正であるので平方根を取ることで $\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{m^2 - 1} < 2m$ を得る．ゆえにこのとき，

$$b_{k+1} = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$$

となる．ゆえに $b_n = (2n + 1)^2$ であり，$a_{22} = 45^2 + 1 = \mathbf{2026}$ と計算できる．

19

解答

解説

$x = \cos\theta$ とおく．次の条件を満たす凸四角形 $PQRS$ を考える．

- $PQ = a, QR = b, RS = c, SP = d$ である．
- $\angle PQR = \theta$ である．

このとき，3 つ目の条件から $\angle RSP = 180^\circ - \theta$ が従う．とくに四角形 $PQRS$ は円に内接する四角形である．さらに1つ目の条件と2つ目の条件から四角形 $PQRS$ は円に外接する四角形でもあることが分かる．4 つ目の条件よりこの四角形の面積は 5 であることが分かる．Brahmaguptaの公式より，これは $\sqrt{abcd}$ に等しいので，解答すべき値は $\mathbf{25}$ である．

20

解答　$4\pi(\pi - \alpha + \frac{11\sqrt{5}}{27})$

x軸とy軸と垂直になるようにz軸を取る。曲面Sを平面x=sで切断して曲面Sの方程式は$\frac{x-1)^2}{4}$ $+y^2+z^2$=1 と表せる。
ここで、曲面Sの平面y=t (-1≦t≦1) における断面の方程式は

$\frac{(x-1)^2}{4}$ $+z^2$=1-t^2 である。これは t=±1のときに点(1,0)を表しt≠±1のとき

$\frac{(x-1)^2}{4(1-t^2)}$ $+\frac{z^2}{(1-t^2)}$ =1 となる楕円となる。
この楕円を原点まわりに回転させると原点からこの楕円上の点まで
距離の最大値と最小値をそれぞれR,rとして外半径R、内半径rの円環形となる。

この楕円は(1+2$\sqrt{1-t^2}$cosθ、$\sqrt{1-t^2}$sinθ) と表せる。

X=cosθ, T=$\sqrt{1-t^2}$ (-1≦t≦1, 0<T≦1) とすると,
Oからこの点までの距離の平方は

f(X)=1+4Tcosθ+4T^2cos^2θ+T^2sin^2θ

=1+4TX+4T^2X^2+T^2(1-X^2)

=3$T^2X^2+4TX+T^2$+1

=3$T^2(X+\frac{2}{3T})^2$+T^2- $\frac{1}{3}$

(ⅰ) -$\frac{2}{3T}$<-1⇔T<$\frac{2}{3}$⇔t^2>$\frac{5}{9}$のとき

f(x) の値域はf(-1)≦f(X)≦f(1)より

R^2=f(1)=4T^2+4T+1

r^2=f(-1)=4T^2-4T+1

より

$R^2-r^2=8T=8\sqrt{1-t^2}$

(ⅱ) -1≦$-\frac{2}{3T}$(<0)⇔T≧$\frac{2}{3}$⇔0≦t^2≦$\frac{5}{9}$のとき

f(x)の値域はf(-$\frac{2}{3T}$)≦f(X)≦f(1)より

R^2=f(1)=4T^2+4T+1

r^2=f(-$\frac{2}{3T}$)=T^2- $\frac{1}{3}$

より

R^2-r^2=3T^2+4T+ $\frac{3}{4}$

= $\frac{13}{3}-3t^2$+4$\sqrt{1-t^2}$

以上(ⅰ)(ⅱ)より、大井の立体の平面y=0に関する対称性を考慮して求める体積Vとして

$$\frac{V}{2\pi}=\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{1}8\sqrt{1-t^2}dt+\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{3}}(\frac{13}{3}-3t^2+4\sqrt{1-t^2})dt$$

$$=8\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}dt-4\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{3}}\sqrt{1-t^2}dt+\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{3}}(\frac{13}{3}-3t^2)dt$$

$$\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{3}}\sqrt{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\alpha^2+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\alpha+\frac{\sqrt{5}}{9}$$

$\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{3}}(\frac{13}{3}-3t^2)dt=[\frac{13}{3}t-t^3]$

$=\frac{\sqrt{5}}{3}(\frac{13}{3}-\frac{5}{9})$

$=\frac{34\sqrt{5}}{27}$

よって

$\frac{V}{2\pi}=2\pi-2\alpha-\frac{4\sqrt{5}}{9}+\frac{34\sqrt{5}}{27}$

$=2\pi-2\alpha-\frac{22\sqrt{5}}{27}$

であり

$V=4\pi(\pi-\alpha+\frac{11\sqrt{5}}{27})$となる。

21

解答

解説

$7^{12}-1=666666666666_{(7)}$ である．n を 7 進数で見たときの 7^k の位の数を $a_{n,k}$ とする（11 桁に満たない数は先頭に 0 を補って 12 桁の数として考える）と，$n=a_{n,0}+7a_{n,1}+7^2a_{n,2}+\cdots+7^{11}a_{n,11}$ と表される．Lucasの定理より

$$r_n \equiv \prod_{k=0}^{11} {}_6\mathrm{C}_{a_{n,k}} \pmod 7$$

である．

$${}_6\mathrm{C}_{a_{n,k}} \equiv (-1)^{a_{n,k}} \pmod 7$$

であるので，n の 7 進数での各桁の和が偶数のとき $r_n=1$，奇数のとき $r_n=6$ である．ここで，$A=\{0,1,2,3,4,5\}$，　$B=\{6\}$ と定めると，$(a_{n,0},a_{n,2},\ldots,a_{n,11})$ の中に少なくともひとつ A の要素が含まれているとき，その総和が偶数になる確率と奇数になる確率は等しく，ともに $\frac{1}{2}$ である．$(a_{n,1},a_{n,2},\ldots,a_{n,11})$ が全て B の要素からなるとき，総和が偶数となる確率は 1 である．以上より，求める値は以下のように計算できる．

$$1\cdot 7^{12}\cdot\{(1-\frac{1}{7^{12}})\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{7^{12}}\}+6\cdot 7^{12}\cdot(1-\frac{1}{7^{12}})\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{7^{13}-5}{2}}$$

22

解答 $\frac{\pi}{4}$

QからPHに下ろした垂線の足をAとすると、
三角形PQHと三角形QAHは相似で、その相似比はcoshs:1

これを用いると、$Y=AH=\frac{1}{coshs}$

$X=$**S**$-QA=S-\frac{\sqrt{(coshs)^2-1}}{coshs}$

$=s-\frac{sinhs}{coshs}$

$dX=\frac{(sinhs)^2}{(coshs)^2}ds$

X 0→xのとき、s 0→t

ただし、tはx-1<t<xを満たす実数

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{coshs}dX$

$=\int_0^t \frac{(sinhs)^2}{(coshs)^3}ds$

$=\int_0^t \frac{1}{coshs}-\frac{1}{(coshs)^3}ds$

$=\int_0^t \frac{coshs}{1+(sinhs)^2}-\frac{coshs}{(1+(sinhs)^2)^2}ds$

$=\int_0^{sinht} \frac{1}{1+p^2}-\frac{1}{(1+p^2)^2}dp$

$=\int_0^{arctan(sinht)} (1-cos^2\theta)d\theta$

$=\int_0^{arctan(sinht)} (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2\theta)d\theta$

$=\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}sin\theta cos\theta\right](\theta: 0\rightarrow arctan(sinht))$

$=\frac{1}{2}arctan(sinht)-\frac{sinht}{2cosh^{2t}}$

(なぜなら、$tan\theta=sinht$より、$sin\theta=\frac{sinht}{\sqrt{1+sinht^2}}$かつ$cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+sinht^2}}$

$x\rightarrow\infty$のとき、$t\rightarrow\infty$つまり、$sinht\rightarrow\infty$

よって、$\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=\lim_{sinht\rightarrow\infty}\{\frac{1}{2}arctan(sinht)-\frac{sinht}{2(1+sinht^2)}\}=\frac{\pi}{4}$