

大問1

解答

10

解説

2025に気づけましたか？

大問2

解答

$A = 4, B = 7, C = 2, D = 3, E = 1, F = 0, G = 8, H = 9$

解説

5桁 - 4桁 = 2025だから、 $E = 1$

$E + F = E$ より、 $F = 0$

$EE - H = 2$ より、 $H = 9$

$B \times D$ の下1桁が1だから、残っている2345678のうち、

かけて下1桁が1となる組み合わせは3と7のみ

あとはどちらも試すと、 $B = 3, D = 7$ が不適とわかるので

$B = 7, D = 3$

あとは頑張ります

大問3

解答

81cm^2

解説

正方形の性質を利用して辺BDを辺CDに合わせる。

また、辺GHを辺GJに合わせる。

そうすると、辺CDと辺DGと辺GJの長さの和が、

19cmになるとわかる。

そして、2番目に小さい正方形の1辺の長さが

$(19-2+4) \div 3 = 21 \div 3 = 7$ で7cmになることがわかる。

1番大きい正方形ABCDの1辺の長さは $7+2=9$ cmであることがわかる。

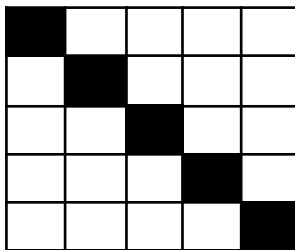
よって四角形ABCDの面積は $9 \times 9 = 81 \text{cm}^2$ になる。

大問4

解答

1981

解説



5×5のマス目で考えてみると上図の場合はビンゴにはならないか、あと1つどこか開けば必ずビンゴになる

よって最大値は $5 \times 5 - 5 + 1 = 21$

同様にして45×45について考えてみるとあと45コまではビンゴにならずにすみどこか1つが開けば必ずビンゴになる

よって $45 \times 45 - 45 + 1 = \underline{1981}$

大問5

解答

54度

解説

線対称にすると、正三角形ができる。

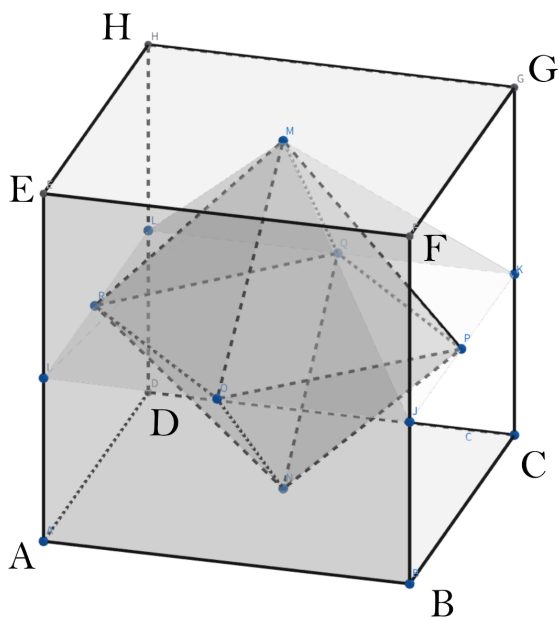
なので正五角形ができて、正五角形の角の半分になる。

大問6

解答

$$\frac{5}{12} \text{ 倍}$$

解説



空洞のない立方体の体積を1とし、面 $ACGE$ の中心を I 面 $CDHG$ の中心を J
空洞は 面 $DBHF$ の中心を K 面 $ABEF$ の中心を L 面 $ABCD$ の中心を M
面 $EFGH$ の中心を N とすると

$(1 - ILKJ \times 1 \div 3) \div 2$ なので、

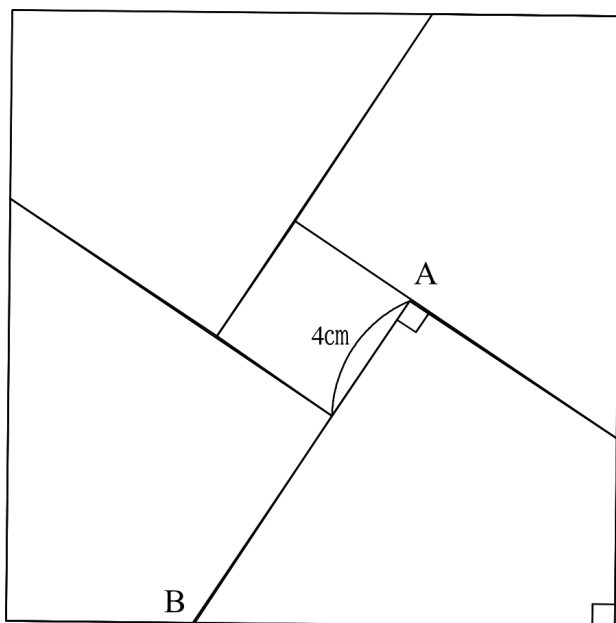
$$[1 - (1 \div 2) \times 1 \div 3] \div 2 = \frac{5}{12}$$

大問7

解答

12

解説



四角形 $ABCD$ の面積を S とおくと、

$$(BC + CD)^2 = 4^2 + 4S$$

$$BC + CD = \sqrt{16 + 4 \cdot 32} = 12$$

(別解)ルートなしで解くパターン

大きい方の正方形の面積を考えると、 $4 \times 4 + 32 \times 4 = 144$

よってこの正方形の一辺は12

ここで、正方形の一辺は $BC + CD$ と等しいので

$$BC + CD = 12$$

大問8

解答

54cm^2

解説

辺 CD と辺 FE をのばし正三角形 EDG をつくります。

そして辺 CD と辺 DG 、辺 FE と辺 EG の長さは等しいことより

三角形 DGP は 6cm^2 、三角形 EGP は 10cm^2 とわかります。

四角形 $DGEP$ は 16cm^2 で三角形 DEP が 7cm^2 なので

正三角形 EDG は 9cm^2 とわかります。

正三角形 EDG は正六角形 $ABCDEFG$ の6分の1の面積なので
正六角形 $ABCEFG$ の面積は 9×6 で 54cm^2 となります。

大問9

解答

24通り

解説

A', B', C' の大小関係は4通り

- ① $A' = x, B' = x - 2, C' = x$
- ② $A' = x, B' = x - 2, C' = x - 4$
- ③ $A' = x, B' = x + 2, C' = x$
- ④ $A' = x, B' = x + 2, C' = x + 4$

$$1 + 2 + \cdots + 6 = 21$$

①のとき $A' + B' + C' = 3x - 2 = 21$

$3x = 23 \quad x = \frac{23}{3}$ 整数ではないため不適

②のとき $A' + B' + C' = 3x - 6 = 21$

$3x = 27 \quad x = 9 \quad \therefore A' = 9, B' = 7, C' = 5$

③のとき $A' + B' + C' = 3x + 2 = 21$

$3x = 19 \quad x = \frac{19}{3}$ 整数ではないため不適

④のとき $A' + B' + C' = 3x + 6 = 21$

$3x = 15 \quad x = 5 \quad \therefore A' = 5, B' = 7, C' = 9$

ただし、 $C' > 6$ より不適

したがって②のみ成立する

$C' = 5$ より か = 5

$A' = 9, B' = 7$

あ + い + う = 9 え + お = 6

$\Rightarrow$ あ = 1, い = 2, う = 6 ー①

または あ = 2, い = 3, う = 4 ー②

①のとき え = 3 お = 4

もしくは え = 4 お = 3

②のとき え = 1 お = 6
もしくは え = 6 お = 1

①のとき あ,い,う は $3 \times 2 \times 1 = 6$
え,お は $2 \times 1 = 2$

よって $6 \times 2 = 12$ (通り)

②のときも同様に12通り

したがって $12 \times 2 = 24$ (通り)

大問10

解答

6個

解説

①自然数Nを千の位をa、百の位をb、十の位をc、一の位をd
として表し、 $N=abcd$ とする。

②125の倍数の判別方法
→下三桁が125の倍数(000,125,250,375,500,625,750,875)
理由... $125 \times 8 = 1000$ のため4桁目以降はすべて125で割り切れるため。

③3の倍数の判別方法
→各桁の総和が3の倍数

④自然数Nは4桁なのでaは1～9(0を含まない)となる。

これらを用いて自然数Nを求める。
②よりbcdは125の倍数である必要がある。
しかし、自然数Nは0を一つしか含まないため
0を二個以上含むものは候補から外れる。
また、④より0を含まないものも除外される。
よって bcd は 250,750 のみとなる。
さらに③より $a+2+5+0$, $a+7+5+0$ が
それぞれ3の倍数である必要がある。

i)bcdが250のとき
 $a+2+5+0=3$ の倍数 となるときaは2,5,8 となる。
よってこの場合の自然数Nは 2250,5250,8250 の3個となる。

ii)bcdが750のとき

$a+7+5+0=3$ の倍数 となるときのaは 3,6,9 となる。
よってこの場合の自然数Nは 3750,6750,9750 の3個となる。

i) ii)より自然数Nの個数は6(個) となる。

大問11

解答

あ:20 う:1 せ:22 な:8

解説

1層目				2層目				3層目		
20	18	4		6	19	17		16	5	21
15	1	26		25	14	3		2	27	13
7	23	12		11	9	22		24	10	8

$15 + 14 + 13 = 42$ より、列の数の和が42であることが分かる

色々計算していくと

1層目				2層目				3層目		
あ	18	い		く	19	こ		そ	5	ち
15	1	26		25	14	3		2	27	13
お	23	き		し	9	せ		と	10	な

まで明らかになる。ここで2度目は縦横斜めの全ての列の数の和が42になることを利用して残った数との組み合わせを考えると上図のように一意に定まる。

大問12

解答

2025

解説

88,90,92は連続する偶数なので
88の倍数から92の倍数までの偶数は
全て表すことができる。

$88 \times 23 = 92 \times 22 = 2024$ なので $88 \times 22 - 2$ で
かつ $92 \times 21 + 2$ の1934が表すことのできない
最大の偶数といえる。

補足:91があっても88の倍数から92の倍数の区間に
入らないので1934は表せない。

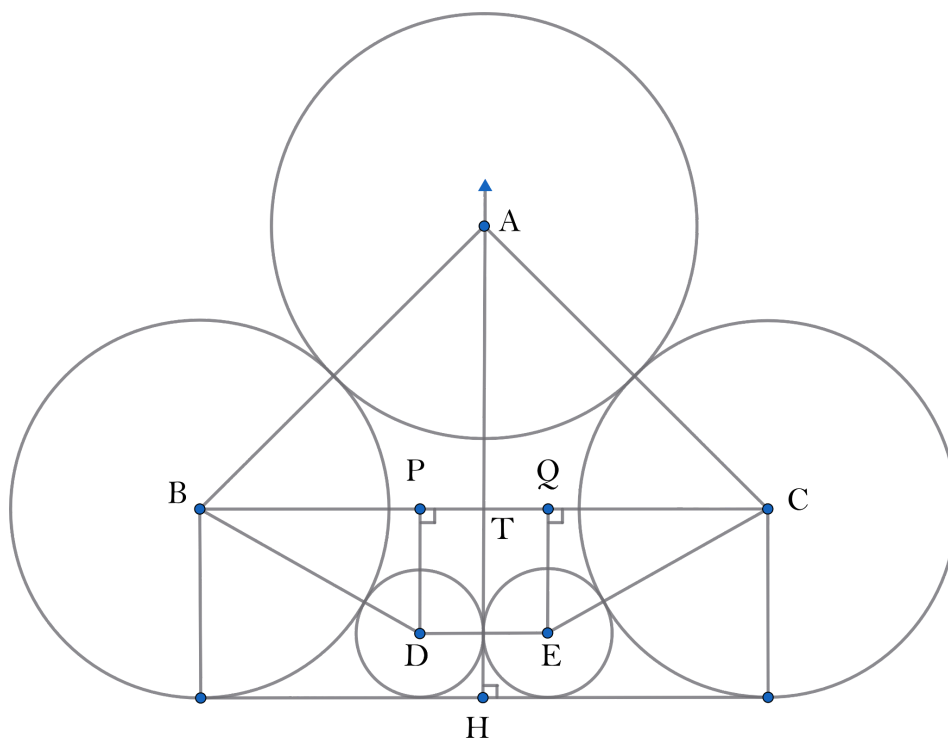
2025は奇数なので作るために必ず91を一回は必要とする。よって $2025 = 1934 + 91$ より作れない
ことがわかる。
また2027以上の奇数も必ず91を一回は足さないといけない。1936以上の偶数は必ず表せること
から不適である。
よって2025が最大といえる。

大問13

解答

$$\frac{2\sqrt{7}(2\sqrt{3}-1)}{11} \quad \text{変更後} 16 - 8\sqrt{3}$$

解説



円Dの半径を r とする。また、上図のように補助線を引く。

$$AB = R_A + R_B = 8$$

辺BCとAHの交点をTとして

$$AT = AH - TH = AH - R_b = 9 - 3 = 6$$

$\triangle ABT$ において三平方の定理より

$$AB^2 = BT^2 + AT^2$$

$$BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{よって } BC = BT \cdot 2 = 4\sqrt{7} \quad \text{---①}$$

次に四角形BCEDに注目する

$\triangle BDP, \triangle CEQ$ において三平方の定理が成立する

また、仮定より $PQ = DE = 2r$

したがって $BC = BP + PQ + QC = 2BP + PQ$

$$= 2\sqrt{(3+r)^2 - (3-r)^2} + 2r = 4\sqrt{3r} + 2r \quad \text{---②}$$

$$\text{①, ②より } 4\sqrt{3r} + 2r = 4\sqrt{7}$$

$$r(2\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{7}$$

変更後

円Dの半径を r とする。また、上図のように補助線を引く。

$$AB = R_A + R_B = 8$$

辺BCとAHの交点をTとして

$$AT = AH - TH = AH - R_b = 10 - 4 = 6$$

$\triangle ABT$ において三平方の定理より

$$AB^2 = BT^2 + AT^2$$

$$BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\text{よって } BC = BT \cdot 2 = 16 \quad \text{---①}$$

次に四角形BCEDに注目する

$\triangle BDP, \triangle CEQ$ において三平方の定理が成立する

また、仮定より $PQ = DE = 2r$

したがって $BC = BP + PQ + QC = 2BP + PQ$

$$= 2\sqrt{(4+r)^2 - (4-r)^2} + 2r = 8\sqrt{r} + 2r \quad \text{---②}$$

$$\text{①, ②より } 8\sqrt{r} + 2r = 16$$

これを解いて、 $\sqrt{r} = -2 + 2\sqrt{3}$ または $\sqrt{r} = -2 - 2\sqrt{3}$

つまり $r = 16 - 8\sqrt{3}$ または $r = 16 + 8\sqrt{3}$

$r < 4$ より $r = 16 - 8\sqrt{3}$

大問14

解答

以下において法6として

$$n \equiv 1, 5 \text{ のとき } \frac{(n-1)(n+1)}{12} \text{ がある}$$

$$n \equiv 2, 4 \text{ のとき } \frac{(n-2)(n+2)}{12} \text{ がある}$$

$$n \equiv 3 \text{ のとき } \frac{(n-1)(n+1)+4}{12} \text{ がある}$$

$$n \equiv 6 \text{ のとき } \frac{(n-2)(n+2)+4}{12} \text{ がある}$$

解説

回転や折り返しを区別して考えてみる

n 本の頂点から3つ選び直線で結べばよいので

$$nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

n が3の倍数であるかないかで正三角形があるかどうかが変わり

n が偶数か奇数かで二等辺三角形のでき方が変わるため

法を6として合同式を使い考える

法を6として

$n \equiv 1$ のとき

正三角形はない

二等辺三角形は $\frac{n-1}{2}$ 種類ありそれぞれ n 本ある

その他の三角形は $nC_3 - \frac{n(n-1)}{2}$ ありそれぞれ n 本ある

$$n \text{ で割り } \frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-5)}{6}$$

反転を考えるとそれぞれ2通りずつあり2で割って $\frac{(n-1)(n-5)}{12}$

$$\text{よって三角形は } \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(n-5)}{12} = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$$

$n \equiv 2$ のとき

正三角形はない

二等辺三角形は $\frac{n-2}{2}$ 種類ありそれぞれ n 本ある

その他の三角形は $nC_3 - \frac{n(n-2)}{2}$ ありそれぞれ n 本ある

$$n \text{ で割り } \frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-4)}{6}$$

反転を考えると2で割って $\frac{(n-2)(n-4)}{12}$

$$\text{よって三角形は } \frac{n-2}{2} + \frac{(n-2)(n-4)}{12} = \frac{(n-2)(n+2)}{12}$$

$n \equiv 3$ のとき

正三角形は $\frac{n}{3}$ 本ある

二等辺三角形は $\frac{n-1}{2} - 1$ 種類ありそれぞれ n 本ある

その他の三角形は $nC_3 - (\frac{n-1}{2} - 1)n - \frac{n}{3}$ ありそれぞれ n 本ある

$$n \text{ で割り } \frac{(n-1)(n-2)}{6} - (\frac{n-1}{2} - 1)n - \frac{1}{3} = \frac{(n-1)(n-5)+4}{6}$$

反転を考えると2で割って $\frac{(n-1)(n-5)+4}{12}$

$$\text{よって三角形は } 1 + (\frac{n-1}{2} - 1) + \frac{(n-1)(n-5)+4}{12} = \frac{(n-1)(n+1)+4}{12}$$

n≡4のとき	正三角形はない 二等辺三角形は$\frac{n-2}{2}$種類ありそれぞれnコある その他の三角形は$nC_3 - \frac{n(n-2)}{2}$コありそれぞれnコある nで割り$\frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-4)}{6}$ 反転を考えて2で割り$\frac{(n-2)(n-4)}{12}$ よって三角形は$\frac{n-2}{2} + \frac{(n-2)(n-4)}{12} = \frac{(n-2)(n+2)}{12}$
n≡5のとき	正三角形はない 二等辺三角形は$\frac{n-1}{2}$種類ありそれぞれnコある その他の三角形は$nC_3 - \frac{n(n-1)}{2}$コありそれぞれnコある nで割り$\frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-5)}{6}$ 反転を考えて2で割り$\frac{(n-1)(n-5)}{12}$ よって三角形は$\frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(n-5)}{12} = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$
n≡0のとき	正三角形は1種類で$\frac{n}{3}$コある 二等辺三角形は$\frac{n-2}{2} - 1$種類ありそれぞれnコある その他の三角形は$nC_3 - \frac{n}{3} - (\frac{n-2}{2} - 1)n$コありそれぞれnコある nで割り$\frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{1}{3} - \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{(n-2)(n-4)+4}{6}$ 反転を考えて2で割り$\frac{(n-2)(n-4)+4}{12}$ よって三角形は$1 + (\frac{n-2}{2} - 1) + \frac{(n-2)(n-4)+4}{12} = \frac{(n-2)(n+2)+4}{12}$コある

大問15

解答

2025

解説

1011 = 3 × 337である。
 また正の奇数の約数で聞いているので、
 少なくともa! は3で336回割れる必要がある。
 これを満たす、aの最小が678であるが、
 5で割る回数なども考えると、
 678と1353はちょうど100回や201回割れる素数を含まない2025は
 ちょうど11ぐらいの素数で201回割れることから
 2025が最小の自然数となりました。

大問16

解答

96

解説

三角錐 $OABC$ について $OA=OB=OC$ より

点 O から三角形 ABC におろした垂線の足は三角形 ABC の外心に一致する。

三角形 ABC の外心を H とすると、三角形 ABC は直角三角形だから

外心 H は辺 AC の中点であることが分かる。

($OH = h$ とすると)ここで、三角形 ABC 、 OHA についての三平方の定理より

$$p^2 + q^2 = r^2$$

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\text{よって } r^2 = 4(a^2 - h^2) = p^2 + q^2$$

また、 $h^2 = a^2 - r^2$ かつ a と r が正整数であることから、 h も正整数

つまり、 $a^2 - h^2$ も正整数だから、

$\text{Mod}4$ をとると、 $4(a^2 - h^2) \equiv p^2 + q^2 \equiv 0$ である。

これと、自然数の平方数を4で割ったあまりは0か1しかないことから、

$p^2 \equiv 0$ かつ、 $q^2 \equiv 0$ であることが分かる。

よって、 p, q は共に偶数。

これを用いると、 r も偶数だと分かる。

$p = 2p', q = 2q', r = 2r'$ とおくと(p', q', r' は自然数)

$$p'^2 + q'^2 = r'^2 \text{ かつ } r'^2 + h^2 = a^2$$

また、三角錐 $OABC$ の体積 V は

$$V = 2p'q' \times h \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}p'q'h \text{ と表せる}$$

$p' = 3, q' = 4, r' = 5$ のとき、 $h = 12, a = 13$ で、 V は最小値96をとる

(なぜなら3, 4, 5が直角三角形の全ての辺の長さが自然数となる辺の長さの最小の組だから)

ここで、96が最小であることを示しておく上述の通り、3, 4, 5が最小のくみであるから、 $h > 3$ または $h = 3$

つまり、底面の三角形の面積が96以下となる p', q', r' の組で

V が96以下となるものがないことを示せばよい

底面積が96以下になる互いに素な三角形の辺長さの組は(3, 4, 5)(5, 12, 13)(7, 24, 25)(8, 15, 17)

このうち、いずれも体積が96以下になるものはない

よって、96が最小

大問17

解答

$$a < b < \frac{5}{3}a \text{ のとき } a(b - a) < T \leq \frac{(a+b)^2}{8}$$

$$\frac{5}{3}a \leq b < 2a \text{ のとき } a(b-a) < T < (b-a)(3a-b)$$

解説

左図のように $\triangle APS$, $\triangle BPQ$, $\triangle CQR$ は直角二等辺三角形

$$AP = x \text{ となり, } BP = a - x, CQ = CR = b - a + x, DR = 2a - b - x$$

$$PS = \sqrt{2}x, PQ = \sqrt{2}(a - x), QR = \sqrt{2}(b - a + x)$$

$$2a - b - x > 0, x > 0, x < b, a - x > 0, b - a + x > 0$$

$$\text{より } 0 < x < a \wedge x < b \wedge x > a - b \wedge x < 2 - b \wedge 0 < a < b < 2a \text{ より } 0 < x < 2a - b$$

$$\text{面積 } T = \frac{1}{2} \cdot PQ(PS + QR) = (a - x)(b - a + 2x)$$

$$= -2x^2 + (3a - b)x - a^2 + ab$$

$$= -2\left(x - \frac{3a-b}{4}\right)^2 + \frac{(a+b)^2}{8}$$

$$0 < a < b < 2a \text{ より } \frac{3a-b}{4} > 0 \text{ で}$$

$$\text{また } \frac{2a-b}{2} - \frac{3a-b}{4} = \frac{a-b}{4} < 0 \text{ より}$$

$$\frac{2a-b}{2} < \frac{3a-b}{4} \text{ であり}$$

$$(2a - b) - \frac{3a-b}{4} = \frac{5a-3b}{4} \text{ となる}$$

$$(i) a < b < \frac{5}{3}a \text{ のとき}$$

$$0 < \frac{3a-b}{4} < 2a - b \text{ より}$$

$$a(b-a) < T \leq \frac{(a+b)^2}{8}$$

$$(ii) \frac{5}{3}a \leq b < 2a \text{ のとき}$$

$$2a - b \leq \frac{3a-b}{4} \text{ より}$$

$$a(b-a) < T < (b-a)(3a-b)$$

$$\text{以上より } a < b < \frac{5}{3}a \text{ のとき } a(b-a) < T \leq \frac{(a+b)^2}{8}$$

$$\frac{5}{3}a \leq b < 2a \text{ のとき } a(b-a) < T < (b-a)(3a-b)$$

大問18

解答

$$n = 2064$$

解説

実験していくと、 n は少なくとも2048以上とわかる。

まず、 $1024 \leq n \leq 2047$ の場合について、 n を2進数で表してみる。

すると、(2)と(3)の、 $n \rightarrow \frac{n}{2}$ または $\frac{n-1}{2}$ にするという

操作は桁を1つずつ減らす

ということと動義である。下から b 桁目が1で他の位が全て0のとき、

$a_n = 1024 + 2^{b-1} - 2^{10-b}$ と表せる。また、下から b 桁目と c 桁目が1で、

他の桁は全て0とすると($b \neq c$)

$a_n = 1024 + 2^{b-1} + 2^{c-1} - 2^{10-b} - 2^{10-c} - 2^{|b-c-1|}$ という様に表せる。

1が3つ以上ある時も同じ様に表せる

$b, c, \dots, m$ は1~10の異なる整数とすると、

$$a_n = 1024 + (2^{b-1} + 2^{c-1} + \dots + 2^{m-1}) - (2^{10-b} + 2^{10-c} + \dots + 2^{10-m}) \\ - (2^{|b-c-1|} + 2^{|b-d-1|} + \dots) = 2000$$

これを整理して、

$$2^{b-1} + 2^{c-1} + \dots + 2^{m-1} = 976 + 2^{11-b} + 2^{11-c} + \dots + 2^{11-m} \\ + 2^{|b-c-1|} + 2^{|b-d-1|} + \dots + 2^{|n-m-1|}$$

と、表せるが、これを満たすような組はないので、不適。

$2048 \leq n \leq 4095$ の時、 $1024 \leq n \leq 2047$ の時と同様に、

$$a_n = 2048 + (2^{b-1} + 2^{c-1} + \dots + 2^{m-1}) - (2^{11-b} + 2^{11-c} + \dots + 2^{11-m}) \\ - (2^{|b-c-1|} + 2^{|b-d-1|} + \dots) = 2000$$

となる。これを整理して、

$$48 + 2^{b-1} + 2^{c-1} + \dots + 2^{m-1} = 2^{11-b} + 2^{11-c} + \dots + 2^{11-m} \\ + 2^{|b-c-1|} + 2^{|b-d-1|} + \dots + 2^{|n-m-1|}$$

よって $48+16=64$ で、 $b=5$ 、つまり、一番上の位と下から5桁目だけが

1の数が最小となる。つまり2進数だと100000010000、

10進数で2064が答えになる

最小性の証明はパワーです。

2024未満で $a_n = 2000$ を満たす n は存在しないので2024以上の偶数を2064まで a_n を求めたら、

一応 $n=2064$ で最小であることの証明はできます

他に簡単に理論的にできる証明があったら教えてください

大問19

解答

$$(\sqrt{60} + 7)^{2025} : \text{偶数} \quad (\sqrt{60} + 8)^{2025} : \text{奇数}$$

解説

$$(\sqrt{60} + 7)^{2025} = (\sqrt{60})^{2025} + {}_{2025}C_1 (\sqrt{60})^{2024} \cdot 7 + \dots + 7^{2025} \quad \text{---①}$$

$$(-\sqrt{60} + 7)^{2025} = (-\sqrt{60})^{2025} + {}_{2025}C_1 (-\sqrt{60})^{2024} \cdot 7 + \dots + 7^{2025} \quad \text{---② となる}$$

$$\text{①の有理数を} A_n, \text{無理数を} B_n \text{とすると } \text{①} = A_n + B_n, \text{②} = A_n - B_n \text{となる}$$

$$\text{よって } \text{①} + \text{②} = 2A_n \Leftrightarrow \text{①} = 2A_n - \text{②}$$

$$-1 < -\sqrt{60} + 7 < 0 \text{より } -1 < (-\sqrt{60} + 7)^{2025} < 0 \text{ となる}$$

$$\text{以上より } 2A_n - \text{②} \text{ は偶数となる}$$

$$(\sqrt{60} + 8)^{2025} \text{ も同様になる}$$

$$0 < -\sqrt{60} + 8 < 1 \text{より } 0 < (-\sqrt{60} + 8)^{2025} < 1 \text{ となる}$$

$$\text{以上より } 2A_n - \text{②} \text{ は奇数である}$$

大問20

解答

$$(1) \frac{2048}{6435} \quad (2) \frac{2048}{6435} \quad (3) -\frac{37}{120} + \frac{1}{2} \log 2$$

解説

$$(1) A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \text{とおくと}$$

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \sin^{n-1} x \, dx$$

$$= \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x (-\cos^2 x) \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n$$

$$\therefore n \cdot A_n = (n-1)A_{n-2}$$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$$

$$\text{よって } A_{15} = \frac{14}{15} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2048}{6435}$$

$$(2) y = \cos^{15} x \text{ と } y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{15} x \text{ は } x = \frac{\pi}{4} \text{ に対して対称なので}$$

$$x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ の積分の値は同じなので}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{15} x \, dx = A_{15}$$

$$\text{となるので (1) より } A_{15} = \frac{14}{15} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2048}{6435}$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{13} x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = A_n \text{ として}$$

$$A_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^1 B^n dB - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx \quad (B = \tan x)$$

$$= \frac{1}{n+1} - A_n$$

$$\Leftrightarrow A_{n+2} = \frac{1}{n+1} - A_n \Leftrightarrow A_{n+4} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} + A_n$$

$$A_{13} = A_1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} \right) \right\}$$

$$= -\frac{37}{120} + \frac{1}{2} \log 2$$