[解答]
①A、D、E
②9:4
③63回
④34分後
⑤8:9:1
⑥72秒
⑦$3\times5^2\times67\times199$
⑧24π
⑨144個
⑩0.314(5)
⑪15度
⑫12月9日
⑬126通り
⑭$\frac{36}{1001}$
⑮1
⑯23本
⑰N=13
⑱135°:2時44分(480/23)秒,17時5分(300/23)秒
180°:6時46分(1320/23)秒,18時15分(900/23)秒
⑲1056通り
⑳$\sqrt{2}-1$
㉑x=π/6,π/4,π/2,3π/4,5π/6,7π/6,5π/4,3π/2,7π/4,11π/6
㉒$a_n = tan(2^{n-1}tan^{-1}\frac{1}{2})$
㉓$12\sqrt{3} < n < 18\sqrt{3}$
㉔$\frac{392\sqrt{3}}{15}$

①Aが間違っているとき、EACBDの順が存在する。
Dが間違っているとき、EDACBの順が存在する。
Eが間違っているとき、CEABDの順が存在する。
BもしくはCが間違っている場合は存在しない。
よって　A,D,E　が答え。

②三角形Sと三角形Tは相似で、相似比が3:2である。
よって、面積比は9:4である。

③2023=7×17×17なので、
2023までかけた数が何個17を素因数に持っているか、求める。
2023÷17=119
2023÷289=7
よって、17を素因数に126個もつので、
最大63回割ることができる。

④

<時系列>

0~3分栄くんのみが走っている

3~5分栄くんも東さんも走っている※1

※1 栄くんが休憩し、東くんが走っているとすると、
栄くんと東くんの走る速さがともに50m/分となり、
ともに走っている場合は2人の間の距離は一定になる。
仮にそうだとすると、24分以降のグラフは一直線になってしまうため、不適。
よって栄くんも東さんも走っていることになる。

5~15分栄くんは走っていて、東さんは休憩中

15~24分栄くんも東さんも休憩している

24~25※2分栄くんは休憩していて、東くんは走っている

25分~栄くんも東さんも走っている

※2 25(分)は下記の<計算>によって算出される

↓以上を表にまとめた

名前\時刻	0~3分	3~5分	5~15分	15~24分	24~25分	25分~
栄くん	走	走	走	休	休	走
東さん	×	走	休	休	走	走

<計算>

栄くんの走る速さは

150÷3=50(m/分)

東さんの走る速さは

50+(150-50)÷(5-3)=100(m/分)

栄くんが走り始めてから15分後の2人の距離は

50+(15-5)×(100-50)=550(m)

栄くんが休憩をやめたのは栄くんが走り始めてから

(550-450)÷100+24=25(分後)

東さんが栄くんに追いついのは、栄くんが走り始めてから

25+450÷(100-50)=34(分後)

答え34分後

⑤6角形の面積を1とすると、

X=1/2+5/6=4/3

Y=1+1/2=3/2

Z=1/6

Yは小さい三角形を空白のところに移動させる。

よって、X:Y:Z=8:9:1である。

⑥帰りの「動く歩道」の速さは一定なので、
帰りの速さを使って求める。
次郎くんの分速は、
5040÷60=84(m/min)である。
帰りの「動く歩道」は25(m/min)~40(m/min)なので、
次郎くんは実質109(m/min)~124(m/min)で歩いている。
「動く歩道」は問題より144mである。
109(m/min)のとき、
144÷109×60=79.26…(s)となる。
124(m/min)のとき、
144÷124×60=69.67…(s)となる。
答えは整数なので、70~79の間にある。
また、帰りの「動く歩道」の速さも整数である。
答えを□としたとき、
144÷$\frac{□}{60}$となるため、□は、
2,3,5の倍数で構成されなければならない。
その結果、□としてありえるのは72,75の2つである。
それぞれを計算すると、
144÷$\frac{72}{60} = 120$
144÷$\frac{75}{60} = 115.2$となるため、
答えは72秒のみである。

[補足]
太郎君の最初の速さは150(m/min)である。

⑦p>qでともに素数、そして和が129であり、
2つの素数の和が奇数になるので、
（偶数）＋（奇数）という組み合わせしか存在しない。
そして、偶数かつ素数なのは2のみなので、
q=2である。
なのでp=127となる。
②の式より、
x=1000102-127=999975となる。
これを愚直に素因数分解してもよいが少し工夫をする。
$999975 = 1000^2 - 5^2$と表せるので、
$1000^2 - 5^2 = (1000 + 5)(1000 - 5) = 1005\times995$となる。なので、
$1005\times995 = 5^2\times201\times199 = 3\times5^2\times67\times199$となる。

⑧下の3/4円を延長して、ドーナツ型になるようにする。
長さが8と与えられている線分の
1番左を点A、1番右を点B、中点を点Cとする。
下の円の中心をOとする。
大きい円の半径をR、小さい円の半径をrとすると、
R=OA、r=OCであり、
三平方の定理より、
$AC^2 + OC^2 = AO^2$である。
つまり、$4^2 + r^2 = R^2$⇔$R^2 - r^2 = 16$である。
ドーナツ型の面積は、
（大きい円の面積）ー（小さい円の面積）なので、
$R^2\pi - r^2\pi = 16\pi$であり、
その3/4で、それの2倍なので、24πである。

⑨まず分母分子を41倍する。
すると、$\frac{41\times ABCD}{99999}$となる。
このとき、41×ABCDの値は、
EFGH1と一致する。
なので、D=1である。
A≠0で、ABCD<2439なので、
ABCの値は、100~243を取る。
なので、144個である。
[補足]
41×ABCDの値が、EFGH1と一致する理由は
100000x=EFGH1.EFGH1…
-)　　　x=　　　　0.EFGH1…
=99999x=EFGH1
x=$\frac{EFGH1}{99999}$
よって、EFGH1=41×ABCD

⑩0.672を5進数に変換する。

0.1(5)=0.2(10)なので、
0.6(10)=0.3(5)である。・・・①
0.01(5)=0.04(10)なので、
0.04(10)=0.01(5)である。・・・②
0.001(5)=0.008(10)なので、
0.032(10)=0.004(5)である。・・・③
①②③より、
0.672(10)=0.314(5)である。

⑪

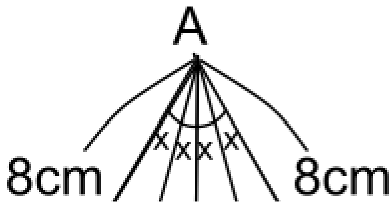


図**1**　　図1は問題の長方形を対角線で2等分して得られる直角三角形(<u>この直角三角形の名前を***N***とする</u>)を4つ繋げてできた四角形ABCDであり、対角線の交点をEとする。

図**2**

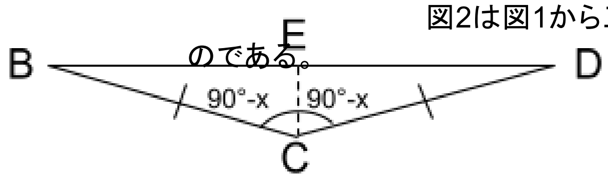


図2は図1から三角形BCDを取り出したものである。

BC=DCだから
⊿BCDは二等辺三角形…①
図1より
∠BCE=∠DCE=90°-x…②
①,②より、二等辺三角形の頂角の二等分線は底角を垂直に二等分するので
BD⊥EC…③

図**3**

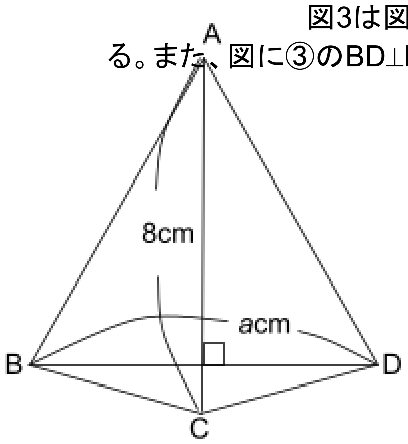


図3は図1のBDの長さを*a*cmとおいて示したものである。また、図に③のBD⊥ECを示している。

四角形ABCDのは、***N***4つ分で構成されているので四角形ABCDの面積は
$(16\times\frac{1}{2})\times4=32(cm^2)$…④
③より、四角形ABCDの対角線は垂直に交わっているので、
四角形ABCDの面積をaを用いて表すと
$8\times a\times\frac{1}{2}=4a(cm^2)$となる
これと④より、
$4a=32$
$a=8(cm)$

このことから、図1のBDの長さは8cmと分かる。
よって、◿ABDはすべての辺の長さが等しいので正三角形である。
正三角形の1つの内角は60°であるため、図1より
4x=60
x=15

答え***x=15***

⑫まず条件より、m≦12である。
17296を素因数分解すると、16×23×47である。
47を素因数に持つので、4m≧47である。

なので、mは12に絞られる。
${}_{48}C_{5n} = 17296$を満たす5nは3,45であり、
3は不適なので5n=45つまり、n=9
よってAさんの誕生日は12月9日である。

[別解]
17296=16×23×47=8×46×47
つまり、$\frac{46\times47\times48}{6} = \frac{{}_{48}P_{3}}{3!} = {}_{48}C_{3} = {}_{48}C_{45}$
これを満たすのはm=12,n=9のみで、
答えはただ一つに決まるので、それ以外存在しない。
よってAさんの誕生日は12月9日である。

⑬2023=7×17^2
かけて2023になる3つの自然数の組み合わせは

[1,1,2023],[1,7,289],[1,17,119],[7,17,17]の4種類である。

3×3のマスに横向きもしくは縦向きで,
上の組み合わせを入れていく。(3つの中では並べ替えていい)
横向きか縦向きかは統一していれば問題ないので、
好きな方でやりましょう。
ここでは横向きで考える。

次の3つのパターンが考えられる。
①1種類のみを3回使う
②1種類を1回、他の1種類を2回使う
③異なる3種類を1回ずつ使う

(i)①の場合
・[1,1,2023]のみ:2023の位置で決まる。3×2×1=6
・[1,7,289]のみ:1の下の2つのマスに1が入ることはないから、
7と289の下2つのマスの計4マスのうちに1が2つ、
斜め向きに入る。
1の配置にしたがって7と289の位置も確定する。
1の入れ方は「左上と右下」、「右上と左下」の2通り
一番上の段の並べ替え方は3!=6通りであるから
2×6=12
・[1,17,119]のみ:数字の関係性から、上と同じ 12
・[7,17,17]のみ:[1,1,2023]同様に7の位置で決まる
3×2×1=6

合計6+12+12+6=36
(ii)②の場合
・[1,1,2023][1,7,289]
[1,1,2023]を2つ使うと必然的に3つ目も使わざるを得ないため、
1つになる。
どの位置に2023を置くかで1の位置が4つ決まり、
残り4マスで7と289の位置が2通り出る。
2×9=18
・[1,1,2023][1,17,119]

上と同じ 18
・[1,1,2023][7,17,17] 1があと2つ必要
あまりにもありえない 0
・[1,7,289][7,17,17]
[1,7,289]を2つ使うと必然的に3つ使わざるを得ないため、
1つになる。
289の下には1と7しかこないが、[7,17,17]の中に1はない。[1,7,289]は1つまでなので 0
・[1,17,119][7,17,17]
17の下に17をおく場合のみ、2つ[1,17,119]を使うことができる。
1つだけ使うこともできない。

「1 17 119
119 17 1
17 7 17」
上2段の並びは2×3(1と119の並び、17の列の位置)
[7,17,17]の段の位置を考えて×3
6×3=18
・[1,7,289][1,17,119]
[1,7,289]を2つ使うと必然的に3つ目を使わざるを得ないため1つ。
289の下に17はこないため、1か7の下になる。
書けば分かるがどちらでやっても不適 0
合計18+18+18=54
(iii)
・[1,1,2023]以外の3つ
289のある行、列には1と7がある。
7(2個)がある列もしくは行の余った場所には17が入り(3個)、
さらに余った場所に119(1個)が入る。
289の入る位置は9通り、1と7の当てはめ方は2×2=4通り、
残りは自動的に定まる。
よって9×4=36
・[1,7,289]以外
2023があるから1が2つ必要だが、[7,17,17]には1がないため0
・[1,17,119]以外
上と同様

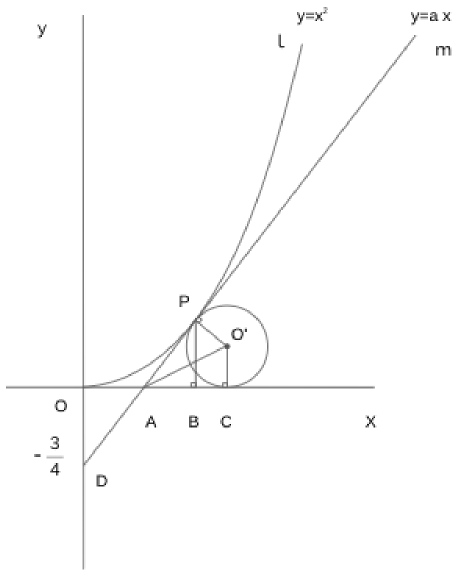
・[7,17,17]以外
2023があるので[1,7,289][1,17,119]の1の位置が固定されるが、
他の数字の組み合わせようがないため0
合計36

36+54+36=126

126通り

⑬$2023=7\times17^{2}$
かけて2023になる3つの自然数の組み合わせは
赤玉は隣り合わないので、青玉と青玉の間に入るが、
青玉が孤立してはいけないので、場合分けする。
(i)赤玉が両端にある時、
赤青青青青青青青青青青赤
この状態から赤を2個いれる。
赤青青a青b青c青d青e青f青g青青赤
としたとき、
aに入ると、残り5通り
bに入ると、残り4通り
cに入ると、残り3通り
dに入ると、残り2通り
eに入ると、残り1通り
よって、全部で15通り。
(ii)赤玉が左端にあって、右端にないとき、
赤青青青青青青青青青青
この状態から赤玉を3個いれる。
赤青青a青b青c青d青e青f青g青青
aに入ると、(c,e)(c,f)(c,g)(d,f)(d,g)(e,g)で、6通り
bに入ると、(d,f)(d,g)(e,g)で、残り3通り
cに入ると、(e,g)で、残り1通り
よって、全部で10通り。
(iii)赤玉が右端にあって、左端にないとき、
(ii)と同様に10通り
(iv)赤玉が、両端にないとき、
青青a青b青c青d青e青f青g青青
(a,c,e,g)の1通り
(i)(ii)(iii)(iv)より、36通りである。
全事象は、$\frac{14!}{10!4!}=1001$
なので、確率は$\frac{36}{1001}$である。

⑮



Tのx座標をtとおくと、その座標はT(t,t^2)
ODの長さは3/4
⊿ODA∽⊿BPA(二角相等)
以上の情報から、AB=$4t^3/(3+4t^2)$ TB=t^2　これより、直線nの傾きを表すことができる。TB/AB=$\{4t^3/(3+4t^2)\}/t^2=(3+4t^2)/4t$…①
また、Tは接点なので、重解であることを利用して直線nの式を求めると
※下の式において、Nは直線nの式を表している
$x^2-N=(x-t)^2$
$N=2tx+t^2$
これより、直線nの傾きは2tである…②
①,②より、
$(3+4t^2)/4t=2t$
$t=\sqrt{3}/2$
これより、Tの座標はT($\sqrt{3}/2,3/4$)
そのため∠TAB=60°
また、内接円の性質より
∠TAO'=1/2∠TAB=30°
30°定規の辺の比より、
⊿TABに注目してTA=$4t^3/(3+4t^2)\times\sqrt{3}=\sqrt{3}/4\times2=\sqrt{3}/2$
⊿TAO'に注目してTO'=$\sqrt{3}/2\times1/\sqrt{3}=1/2$
これより円O'半径が1/2なので直径は1

A.1

⑯立体Aの展開図をバラバラにしたとき、
辺の本数の合計は、

18×4+8×3=96本になる。
立体の辺は、展開図をバラバラにしたときの辺が、
2本重なり1本になるので、
立体Aの辺の本数は96÷2=48本になる。
また展開図は、n個の図形がくっつくには、
(n-1)本の辺がくっついていれば良い。
なので、(18+8)-1=25本の辺がくっついている必要があるので、
切ることができる最大の本数は、
48-25=23本となる。

⑰まず、条件よりn≧8である。
式をnを用いて10進数で表すと、

$\sqrt[7]{3}^{3n+3} = 4n^2 + 4n + 1$となる。
変形して、
$\sqrt[7]{3}^{3n+3} = (2n + 1)^2$・・・①
（右辺）は自然数なので、（左辺）も自然数である。
よって、3n+3は7の倍数である。つまり、
7を法とする合同式を考えると、
$3n + 3 \equiv 0$
$3n \equiv -3$
$n \equiv -1$となる。
なので、n=7k-1(kは2以上の自然数)と表せる。
kが2以上の自然数なのは、n≧8だからである。
これを①に代入すると、
$\sqrt[7]{3}^{3(7k-1)+3} = (2(7k - 1) + 1)^2$
$\sqrt[7]{3}^{21k} = (14k - 1)^2$
$3^{3k} = (14k - 1)^2$
$27^k = (14k - 1)^2$
これを満たすkは2である。

[蛇足]
k=2以外存在しないことを示す。
つまり、k≧3のとき、$27^k - (14k - 1)^2 > 0$を示す、
(i)k=3のとき、
$27^3 - (14\times3 - 1)^2 = 19683 - 1681 = 18002 > 0$
より成り立つ。
(ii)k=mのとき、
$27^m - (14m - 1)^2 > 0$が成り立つと仮定する。
すると、$27^m > (14m - 1)^2$が成り立つことになる。
(iii)k=m+1のときを考える。
$27^{m+1} - (14(m + 1) - 1)^2 = 27\times27^m - (14m + 13)^2$
$> 27(14m - 1)^2 - (14m + 13)^2$

$= 27(196m^2 - 28m + 1) - (196m^2 + 364m + 169)$

$= 26\times196m^2 - 28\times40m - 142$

$= 28(182m^2 - 40m - \frac{71}{14})$

$182m^2 - 40m - \frac{71}{14}$について

$182m^2 - 40m - \frac{71}{14} > 182m^2 - 42m - 7$

$= 7(26m^2 - 6m - 1)$

$26m^2 - 6m - 1$について、

$26m^2 - 6m - 1 > 24m^2 - 8m - 8$

$= 8(3m^2 - m - 1)$

$3m^2 - m - 1$について、

$3m^2 - m - 1 = 3(m - \frac{1}{6})^2 - \frac{13}{12} > 3(m - \frac{1}{6})^2 - 2$

m≧3なので、最小値は$\frac{265}{12}$となるので0より大きい。

よって成り立つ。

(i)(ii)(iii)より、

k≧3を満たすすべてのkは、$27^k - (14k - 1)^2 > 0$

を満たす。

よって、k=2である。

なのでn=7k-1より、n=13である。

⑱

時計に書かれている数字の合計は、

(1+24)×24×1/2=300 これを150ずつに分ければよい

もし領域が24時をまたぐ場合は、反対側の領域を考える。

下図のように数字を設定する(n≧2,1≦t≦24・・・①)と、

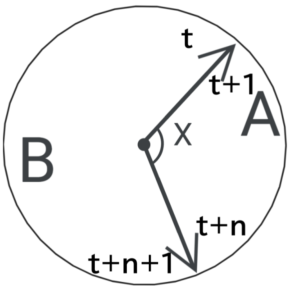
領域内の数字の合計は、等差数列の和の公式より、

(t+1+t+n)×n×1/2=150⇔(2t+n+1)×n=300

nが偶数のとき、2tは偶数、1は奇数であるから2t+n+1は奇数･･･②
同様にしてnが奇数のとき、2t+n+1は偶数･･･③
↓表にしてください

n	2t+n+1	
2	150	②に反する
3	100	①に反する
4	75	①に反する
5	60	①に反する
6	50	②に反する
10	30	②に反する
12	25	t=6　n=12
15	20	t=2　n=15

実際に、この2つのt,nの組は条件を満たす。



よって、分けられた領域とは「3～17」と「1,2,18～24」、
「7～18」と「1～6,19～24」の2種類であり、
3～17の場合がX=135°、7～18の場合がX=180°のときである。
(時計の任意の数字と隣の数字の間の角度は
360÷24=15(°)であることによって分かる。
また、3～17の場合は1,2,18～24の側にXがある。)

実際に時間を求めていく
時針の速さは、360÷24=15より1時間で15°、
よって1分で¼°
分針の速さは、360÷60=6より1分6°

それぞれの場合につき、時針と分針を入れ替えたものが存在する。
図をかいて解くことを前提とする。

(i)X=135°のとき

2つの針はそれぞれ2と3の間、17と18の間にある。
24を真上としたときの上側の領域の針間の角度が135°である。

・2時台の場合
2時ぴったりのときをかく
2時ぴったりのときの針間の角度は15×2=30(°)
答えとなる時間を、2時からk分経過したときと考える。
時針はk/4°、分針は6k°進むから
(360-6k)+(30+k/4)=135
k=1020/23=44+(8/23)
8/23分を秒に直すには、60をかければよい
求める時間は2時44分280/23秒

・17時台の場合

手順は同じなので式をかく
6k+(15×7-k/4)=135
k=120/23=5+(5/23)
5/23に60をかけて秒にする。

求める時間17時5分300/23秒

(ii)X=180°のとき
2つの針は6と7の間、18と19の間

・6時台の場合

360-6k+90+4/k=180
k=1080/23=46+22/23

よって6時46分1320/23秒

・18時台の場合

90-4/k+6x=180
k=360/23=15+15/23
よって18時15分900/23秒

135°:2時44分(480/23)秒,17時5分(300/23)秒
180°:6時46分(1320/23)秒,18時15分(900/23)秒

⑲三平方の定理より、2点間の距離=

$$\sqrt{(x座標の差)^2 + (y座標の差)^2 + (z座標の差)^2}$$

よって、

$$(5\sqrt{2})^2 = 50 = (x座標の差)^2 + (y座標の差)^2 + (z座標の差)^2$$

x,y,z座標の差をそれぞれX,Y,Zとする。
x座標の差の範囲は0≦X≦5、同様に0≦Y≦5、0≦Z≦7

$$50 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

これを満たす整数X,Y,Zを求める。

(i)0≦Z≦5のとき
X=0,Y=5,Z=5、X=5,Y=0,Z=5・・・①
X=5,Y=5,Z=0・・・②
X=3,Y=4,Z=5、X=4,Y=3,Z=5・・・③
X=3,Y=5,Z=4、X=5,Y=3,Z=4・・・④
X=4,Y=5,Z=3、X=5,Y=4,Z=3・・・⑤

①の2組は目の出方が同数であるから、
X=0,Y=5,Z=5の場合だけ考えて2倍する。
③、④、⑤についても同様に、片方だけ求めて2倍する。
また、1回目と2回目の目の出方を入れ替えたものを
異なるものとして数えるため、
計算時はX,Y,Zが0にならないときだけ**×2**をする。
（=0のものは入れ替えても同じ値になるため）

①6×1×3**×2×2**=72、よって72×2=144

②1×1×8**×2×2**=32
③3×2×3**×2×2×2**=144、よって144×2=288
④3×1×4**×2×2×2**=96、よって96×2=24 192
⑤2×1×5**×2×2×2**=80、よって80×2=20 160
したがって144+32+288+192+160= 816

(ii)5＜Z≦7のとき

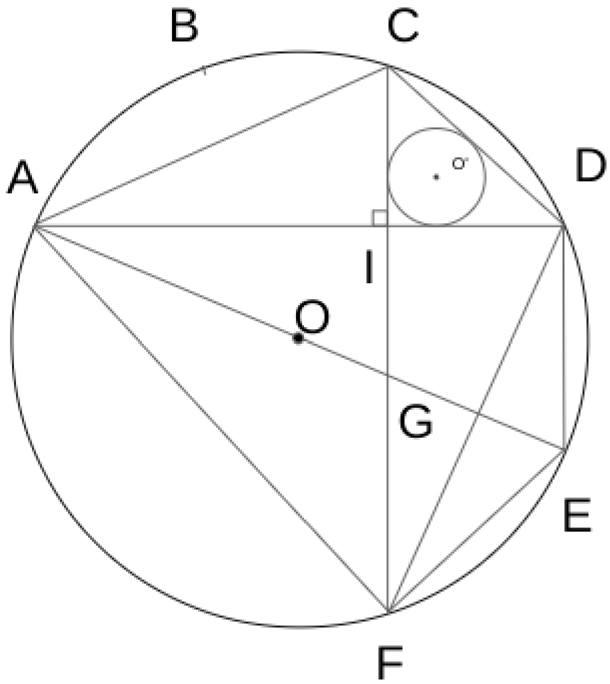
X=0,Y=1,Z=7、X=1,Y=0,Z=7・・・⑥

$6 \times 5 \times 1 \boldsymbol{\times 2 \times 2} = 120$、よって$120 \times 2 = 240$

$816 + 240 = 1056$

よって**1056**通り

⑳



補助線AC,DE,DFと、O'からADに垂線を引く。またその交点をHとする。
(∠CAD=a,∠ACF=b)…☆とおく。また、ADとCFの交点をI,
AEとCFの交点をGとする。
孤AFに対して、円周角の定理より∠ACF=∠AEF=b…①
⊿AFEは二等辺三角形であるため、∠FGE=∠FEG…②
対頂角は等しいので∠IGA=∠FGE…③
①,②,③より、∠IGA=b…④
⊿CAIの内角の和について、
a+b+90°=180°
a+b=90°…⑤
④,⑤より、⊿IAGの内角ついて考えると
∠IAG=a…⑥
AEは円Oの直径であるため、∠AFE=90°
これと①,⑤より、⊿AFEの内角について考えると
∠EAF=a…⑦
☆,⑥,⑦より
∠CAD=∠DAE=∠EAF=a…⑧
このことより弦の長さは等しくなるので
CD=EF=2…⑨
問題条件と☆と円周角の定理より

∠CDA=2a…⑩
⑧と円周角の定理より
∠DCF=2a…⑪
問題条件より(※補足事項として追加した紙に書いてあります。)
∠CID=90°…⑫
⑨~⑫より、⊿CIDは斜辺が2の直角二等辺三角形…♡である。
♡の面積を求めると、♡=1
円O’の半径をrとおき、♡の面積についてrであらわすと
1/2r(√2+√2+2)=1
r=√2-1

㉑$sin^2θ + cos^2θ = 1$より、$sin^2θ = 1 - cos^2θ$

よって、

$sin^2x + sin^22x + sin^23x = 2$

$1 - cos^2x + 1 - cos^22x + 1 - cos^23x = 2$

$cos^2x + cos^22x + cos^23x = 1$

2,3倍角の公式

$cos2θ = 2cos^2θ - 1$

$cos3θ = 4cos^3θ - 3cosθ$

$cos^2x + (2cos^2x - 1)^2 + (4cos^3x - 3cosx)^2 = 1$

$cos^2x + 4cos^4x - 4cos^2x + 1 + 16cos^6x - 24cos^4x + 9cos^2x = 1$

$16cos^6x - 20cos^4x + 6cos^2x = 0$

$cos^2x(8cos^4x - 10cos^2x + 3) = 0$

$cos^2x(2cos^2x - 1)(4cos^2x - 3) = 0$

①$cos^2x = 0$のとき、**x=π/2,3π/2**

②$2cos^2x - 1 = 0$⇔$cos^2x = \frac{1}{2}$のとき、$cosx = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって、**x=π/4,3π/4,5π/4,7π/4**

③$4cos^2x = 3$⇔$cos^2x = \frac{3}{4}$のとき、$cosx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、**x=π/6,5π/6,7π/6,11π/6**

したがって、***x=π/6,π/4,π/2,3π/4,5π/6,7π/6,5π/4,3π/2,7π/4,11π/6***

㉒まず、$a_n \neq \pm 1$であることを示す。

kをある自然数とする。

$a_k = \pm 1$のとき、

(左辺)=0

(右辺)=2となり、a_{k+1}が存在しないが、

これはすべての自然数nについて、a_nが存在することに矛盾するので、

$a_n \neq \pm 1$である。

よって、$(1 - a_n^2) \neq 0$である。

なので、

$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}$である。

$a_n = tan\theta_n$と置換すると、

$tan\theta_{n+1} = \frac{2tan\theta_n}{1-tan\theta_n}$となり、（右辺）は、

tanの2倍角を表しているので、

$tan\theta_{n+1} = tan2\theta_n$となるので、

$\theta_{n+1} = 2\theta_n + m\pi$である。（mは整数）

$\theta_{n+1} + m\pi = 2(\theta_n + m\pi)$

$tan\theta_1 = a_1 = \frac{1}{2}$より、

$\theta_1 = tan^{-1}\frac{1}{2} + p\pi$である。（pは整数）

よって、$\theta_n = 2^{n-1}(tan^{-1}\frac{1}{2} + p\pi) - m\pi$

よって、$a_n = tan\theta_n$より、

$a_n = tan(2^{n-1}(tan^{-1}\frac{1}{2} + p\pi) - m\pi)$

よって、$a_n = tan(2^{n-1}(tan^{-1}\frac{1}{2} + p\pi))$である。

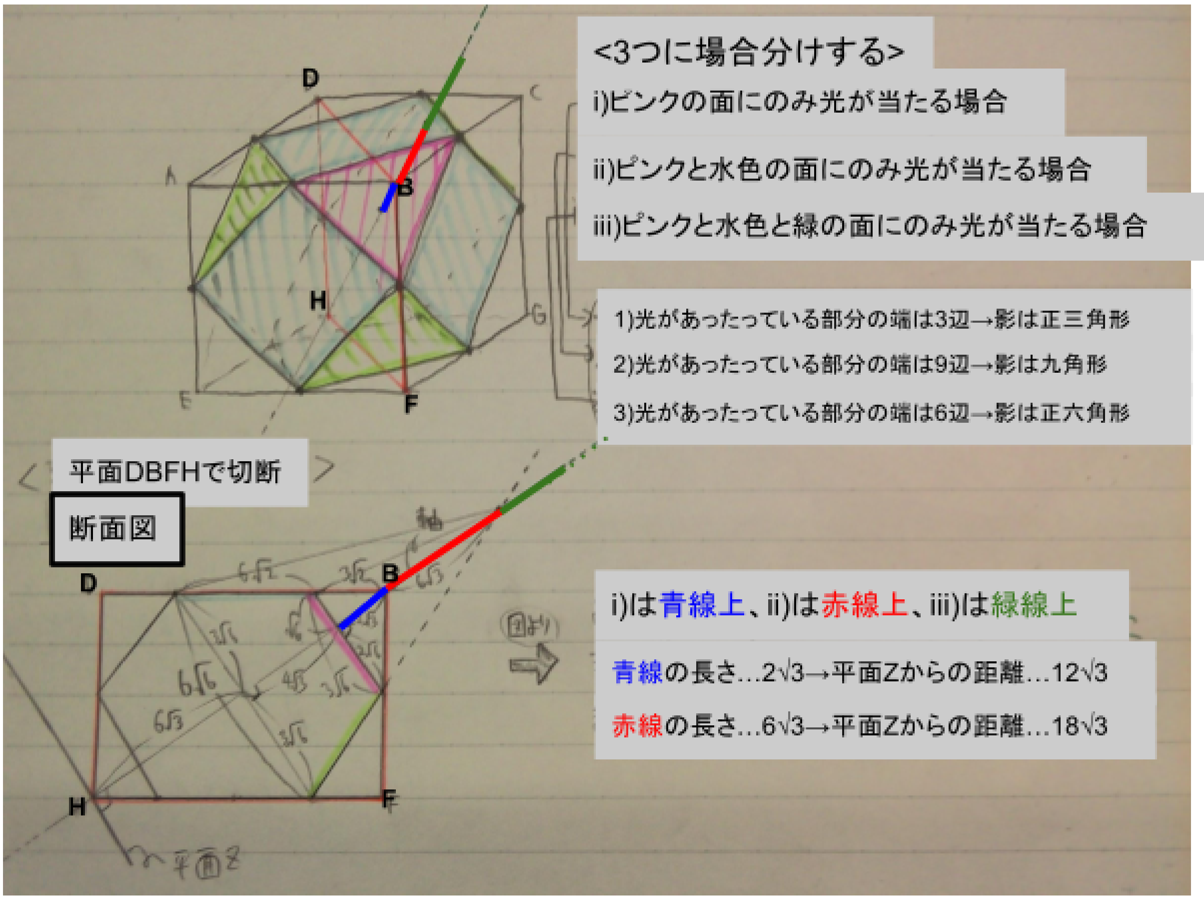
よって、$a_n = tan(2^{n-1}tan^{-1}\frac{1}{2})$

[補足]

実際に$a_k = \pm 1$になることはない

㉓

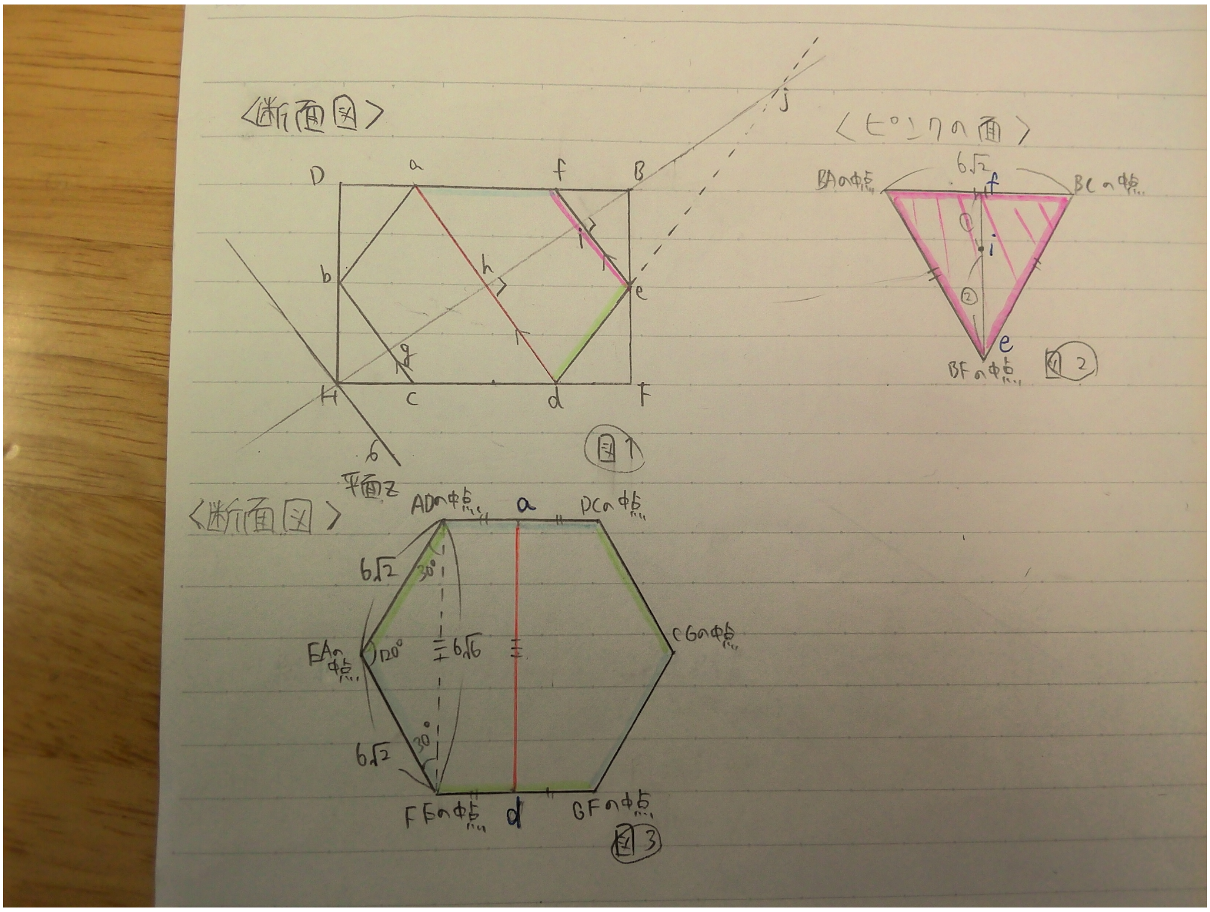
<問題を解く方針>



断面図から分かるように、
黄緑色の3面を拡張し立体Xの軸(直線BH)と交わる点から
頂点Bまでの範囲(赤い線分上)に光源が置かれているときにii)の場合になる。
ii)は、上側の図の、ピンクの面と水色の面にのみ光が当たってる場合であり、
光が立体Xに当たっている部分の縁の辺は合計9本ある。
そのため、できる影も九角形となる。
平面DBFHで立体を切断したときの断面図から、
相似や三平方の定理などを使うと青線と赤線の長さが求まり、答えが求まる。

答え12√3<n<18√3

<具体的な解法>



立体Yの一辺の長さは6√2(∵12×½×√2=6√2)

No.1 adの長さを求める(図1)
AD,DC,CG,GF,FE,EAのそれぞれの中点で立体Yを切断すると、
図3のような正六角形ができる。
ADの中点,EAの中点,FEの中点を頂点とする二等辺三角形の底角が30°になることより、
ADの中点からFEの中点までの長さは6√6(∵6√2×√3=6√6)
adの長さはADの中点からFEの中点までの長さと等しいので
<u>ad(オレンジ線)=6√6</u>

No.2 jBの長さを求める(図1)
ah=hd=$\frac{ad}{2}$=6√6×½=3√6…①
図2は、BA,BC,BFのそれぞれの中点を頂点とする正三角形を表したものである。
正三角形の重心の性質より、
fi=6√2×$\frac{\sqrt{3}}{2}$×⅓=√6…②
また、ie=fi×2=2√6…③
⊿Bfiと⊿Bahにおいて
図2の正三角形と図3の正六角形は平行であるため、
fe//ad。これより錯角が等しいので∠Bif=∠Bha(=90°)…④
共通な角なので
∠fBi=∠aBh…⑤
④,⑤より、⊿Bfi∽⊿Bah(二角相当)
①,②より、⊿Bfiと⊿Bahの相似比は1:3(∵√6:3√6=1:3)

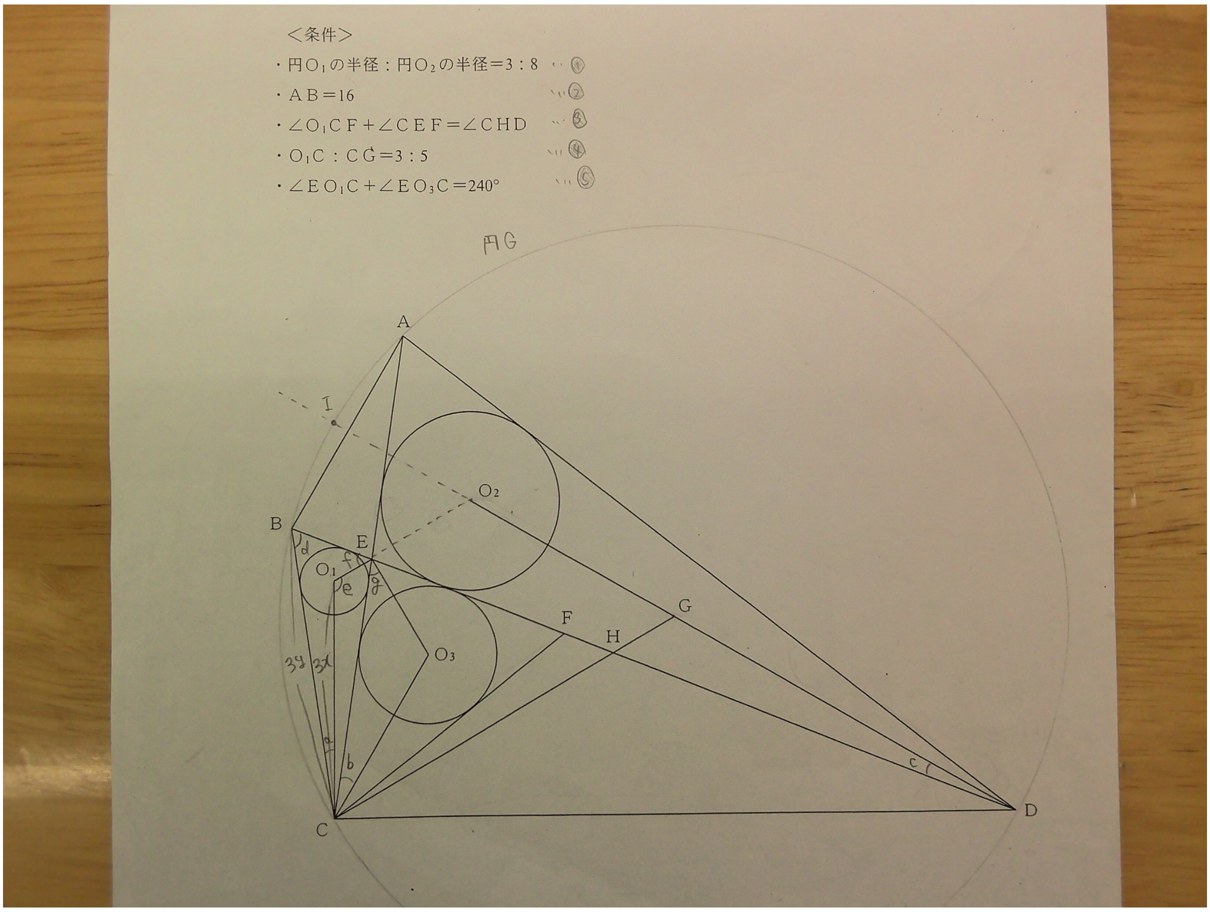
これより、Bi:Bh=1:3…⑥
対象なので、Bh=BH×½=(12×√3)×½=6√3…⑦
⑥,⑦より、Bi=6√3×⅓=2√3…⑧
また、これよりih=6√3-2√3=4√3…⑨

No.3 jBの長さを求める(図1)
⊿jieと⊿jhdにおいて
fe//adより、錯角が等しいので∠jie=∠jhd(=90°)…⑩
共通な角なので∠ije=∠hjd…⑪
⑩,⑪より、⊿jie∽⊿jhd
①,③より、⊿jieと⊿jhdの相似比は2:3
これと⑨より、ji=4√3×$\frac{2}{3-2}$=8√3
これと⑧よりjB=8√3-2√3=6√3…⑫

光源がjB上にある時、影は九角形になる。
以上よりBH=12√3,Hj=12√3+6√3=18√3である。
また、n=12√3のとき影は正三角形となり
n=18√2のとき影は正六角形となるので不適。
よってnの範囲は12√3<n<18√3

答え***12√3<n<18√3***

<解法>



∠BCO_1=a,∠ECO_3=b,∠EDO_2=c,∠CBE=d,∠EO_1C=e,∠BEO_1=f,∠CEO_3=gとすると、
内接円の性質より、∠BCO_1=∠ECO_1=a,∠ECO_3=∠FCO_3=b,∠EDO_2=∠ADO_2=c
円周角の定理より、∠GDH=∠FCH=c
❸の∠O_1CF+∠CEF=∠CHDより、(a+2b)+(d+2a)=d+2a+2b+c∴a=c
∠O_1EO_3=½∠BEF=90°…①
①,❺より、四角形の内角の和は360°なので
∠O_1CO_3=a+b=360°-(90°+240°)=30°…②
②より、∠BCF=2a+2b=60°…③
問題文より、円周角の定理より∠CFD=∠CGD…④
問題文より、∠EO_1C=∠CFD…⑤
④,⑤より、∠CFD=∠CGD=∠EO_1C=e
e=∠EO_1C=180°- $\frac{180°-d}{2}$…⑥　e=∠CFD=d+60°…⑦
⑥,⑦よりd=60°…⑧
③,⑧より、⊿BCFは正三角形。また、e=120°
⊿BCEと⊿ADEにおいて、
対頂角は等しいので∠BEC=∠AED…⑨
2a=2cより、∠BCE=∠ADE…⑩
⑨,⑩より、⊿BCE∽⊿ADE(二角相当)…⑪
相似な図形の対応する角は等しいので∠CBE=∠DAE=60°これより、
円周角の定理で四角形
頂点A,B,C,Dは共円。
②より、∠O_1CG=a+2b+c(=a)=60°…⑫　⑫より、∠ECG=60°-a…⑬
∠O_1CE=180°-(120°+a)=60°-a…⑭

⑬,⑭より、錯角が等しいので、O_1E // CG…⑮
∠BEH=2f+2g=180°(平角公理)…⑯
対頂角は等しいことと、内接円の性質より、∠O_1EC=∠O_2ED=f…⑰
⑯,⑰より、∠O_1EO_2=g+2f+g=180°
これより、点O_1、点E、点O_2は同一直線上にある。
これと⑮より、O_1O_2 // CG…⑰
∠CGO_2=180°-120°=60°=∠O_1CG(∵⑫)…⑱
⑰,⑱より、四角形O_1CGO_2は等脚台形
これより、O_1C=3xとするとO_1C=O_2G=3x…⑲
2組の三角形の相似比はそれぞれの内接円の相似比と一致する。
そのため⑲,❶より、⊿BCEと⊿ADEの相似比は3:8なので、
相似な図形の対応する辺の比は等しいのでO_1C:O_2D=3:8
⑲より$O_2D=3x\times\frac{8}{3}=8x$
これよりGD=8x-3x=5x…⑳
❹,⑳より、$CG=3x\times\frac{5}{3}=5x$…㉑
⑳,㉑より、GD=CG=5x…㉒
∠CAD=½∠CGD(∵∠CAD=60°,∠CGD=120°)…㉓
㉒,㉓より、点Gは四角形ABCDの外心(∵㉒から半径が等しい,㉓から円周角の定理が成立)
四角形ABCDの外接円を円Gとし、円Gと直線GDとの交点を点Iとする。
⊿AIDと⊿BIDにおいて、DIが直径であることから円周角の定理より、
∠IAD=∠IBD=180°×½=90°…㉔
共通な辺なので
ID=ID…㉕
∠ADI=∠BDI=c…㉖
㉔,㉕,㉖より、直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので⊿AID≡⊿BID
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので
AD=BD…㉗
⊿BCEと⊿ADEの相似比は3:8なので、BC=3y…㉘とすると、⊿BCEと⊿ADEの相似比は3:8なのでAD=$3y\times\frac{8}{3}$=8y…㉙
㉗,㉙より、AD=BD=8y…㉚

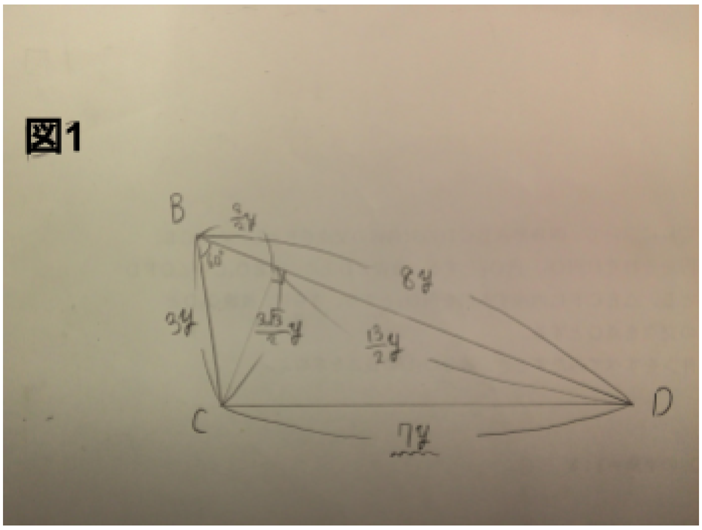
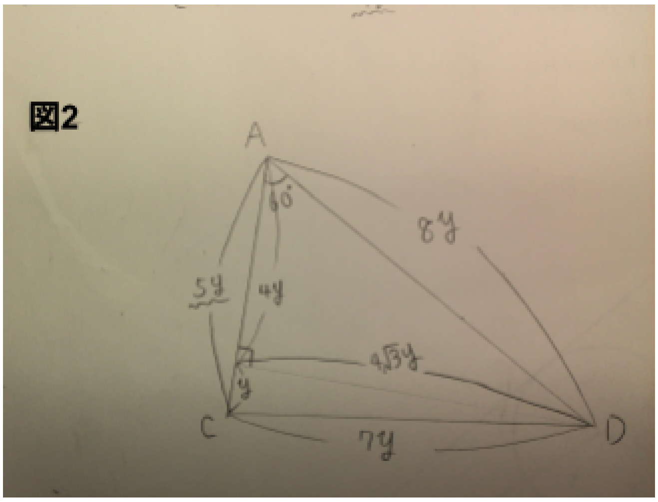


図**1**から、30°定規の辺の比と三平方の定理より、
$CD=\sqrt{(3y\times\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(8y-3y\times\frac{1}{2})^2}$
=7y…㉛



㉛と図**2**から、30°定規の辺の比と三平方の定理より、

$AC=(8y\times\frac{1}{2})+\sqrt{(7y)^2-(8y\times\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$=5y$…㉜

⊿AED∽⊿BEC,⊿AEB∽⊿DEC(それぞれ円周角の定理より二角相当)
相似比は対応する辺の比と等しいので
⊿AED:⊿BEC=8y:3y=8:3…㉝
⊿AEB:⊿DEC=16:7y…㉞
AE=16k…㉟とすると、

$DE=16k\times\frac{7y}{16}=7yk$(∵㉞)…㊱

$BE=16k\times\frac{3}{8}=6k$(∵㉝)…㊲

$CE=6k\times\frac{7y}{16}=\frac{21}{8}yk$(∵㊲,㉞)…㊳

$AC=5y=16k+\frac{21}{8}yk$(∵㉜,㉟,㊳)…㊴

BD=8y=6k+7yk(∵㉚,㊲,㊱)…㊵
㊴,㊵の連立方程式を解くとy=7
CD=7y=49(∵㉛)

※クラウディオス・プトレマイオスの定理(トレミーの定理)から楽にyの値を求めることもできる
 5y×8y=3y×8y+16×7y
⇔y=7
⇔7y=49(=CD)

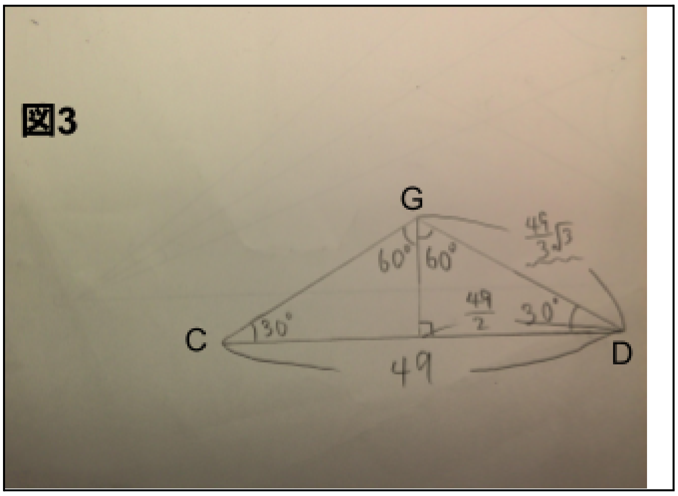


図**3**から、30°定規の辺の比を利用して、

$GD=49\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{49\sqrt{3}}{3}$

$GD=5x, O_2D=8x$より、

$O_2D=\frac{49\sqrt{3}}{3}\times\frac{8x}{5x}=\frac{392\sqrt{3}}{15}$

答え$\frac{392\sqrt{3}}{15}$